

Circunradio y Volumen de Poliedros

Julio Castiñeira Merino

*A mis queridos nietos
Santiago, Gonzalo y Nicolás*

1. Introducción

Una parte importante de los poliedros convexos con caras regulares son inscribibles en una esfera, la esfera circunscrita. Esta familia está compuesta por:

- Los 5 poliedros regulares, también llamados sólidos platónicos.
- Los 13 poliedros arquimedianos.
- Los prismas regulares cuyas caras laterales son cuadrados.
- Los antiprismas cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.
- 25 de los 92 sólidos de Johnson.

Las primeras cuatro categorías corresponden a los poliedros uniformes convexos llamados así por ser iguales los vértices del poliedro. Los sólidos de Johnson circunscribibles se obtienen por disección (14), rotación de una parte (7) o rotación y disección (4) de algunos poliedros uniformes. Una buena descripción de los poliedros uniformes se encuentra en [6] y en [4] y de los sólidos de Johnson en [5].

Este trabajo calcula, en primer lugar, los circunradios de dichos cuerpos utilizando la fórmula que relaciona la arista lateral y la arista basal con el coseno del ángulo diedral de una pirámide regular, la configuración en el vértice de los poliedros uniformes y los polinomios de Chebishev. Posteriormente calculamos el volumen de los poliedros por descomposición en pirámides regulares, usando el número y tipo de sus caras, y el valor del circunradio del poliedro con arista unidad.

2. Ángulo Diedro Interior de una Pirámide Regular

Si b es la arista de la base de una pirámide regular de n lados y l la arista lateral, entonces el ángulo diedro interior de arista l que denotaremos por δ_n satisface la relación:

$$\cos \delta_n = 1 + \frac{8l^2}{b^2 - 4l^2} \cos^2 \frac{\pi}{n}. \quad (1)$$

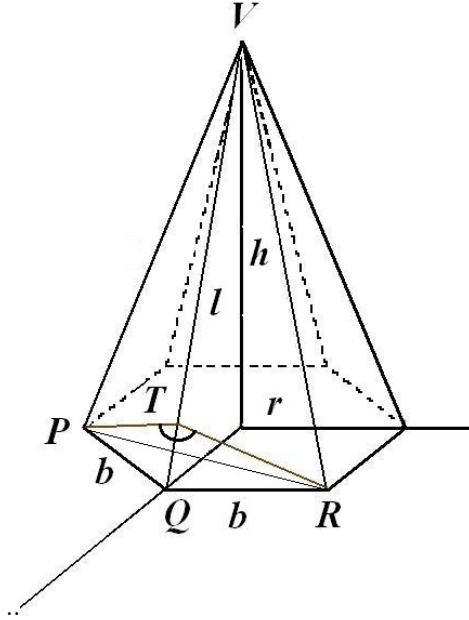


Figura 1: Angulo interior $\angle PTR$ de una pirámide regular

Demostración

Sea T el pie de la perpendicular a la arista l que pasa por el vértice Q , (ver figura 1). Por el teorema del coseno

$$\overline{PR}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{TR}^2 - 2\overline{PT} \cdot \overline{TR} \cos \delta_n$$

observando que el triángulo $\triangle PTR$ es isósceles

$$\cos \delta_n = 1 - \frac{\overline{PR}^2}{2\overline{TR}^2}$$

La base del triángulo isósceles $\triangle PQR$ es $\overline{PR} = 2b \sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)\right) = 2b \cos \frac{\pi}{n}$

Calculemos ahora \overline{TR}^2 . Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\begin{cases} l^2 = \overline{TR}^2 + (l - \overline{TQ})^2 \\ b^2 = \overline{TQ}^2 + \overline{TR}^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{TQ} = \frac{b^2}{2l} \Rightarrow \overline{TR}^2 = \frac{b^2(4l^2 - b^2)}{4l^2}$$

y por tanto

$$\cos \delta_n = 1 + \frac{8l^2}{b^2 - 4l^2} \cos^2 \frac{\pi}{n}. \blacksquare$$

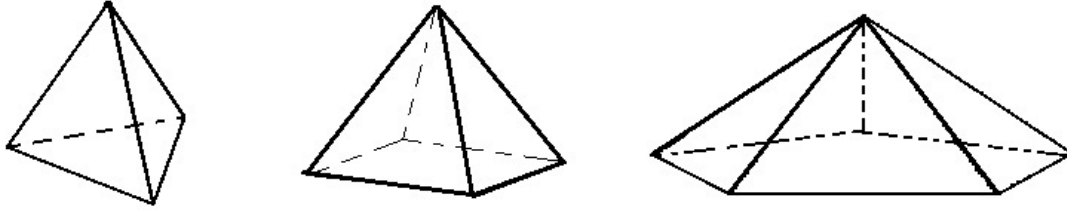


Figura 2: Pirámides triangular, cuadrada y pentagonal

2.1. Ángulos de las Pirámides de Caras Regulares

Aplicamos la fórmula (1) a las pirámides cuyas caras son polígonos regulares $l = b$ y el número de caras laterales $n = 3, 4$ y 5 . Tenemos

$$\cos \delta_n = 1 - \frac{8}{3} \cos^2 \frac{\pi}{n}, n = 3, 4, 5$$

los ángulos se muestran en el cuadro (1).

n	Nombre	$\cos \delta_n$	Ángulo
3	Tetraedro	$1/3$	$70^\circ 31' 43.6''$
4	Pirámide Cuadrada	$-1/3$	$109^\circ 28' 16.3''$
5	Pirámide Pentagonal	$-\sqrt{5}/3$	$138^\circ 11' 22.8''$

Cuadro 1: Ángulos de Pirámides

3. Poliedros Convexos con Caras Regulares

Un poliedro convexo con caras regulares inscribible en una esfera se puede descomponer en tantas pirámides regulares como caras tiene. Los vértices de las pirámides coinciden con el circuncentro del poliedro, las bases de las pirámides son las caras de éste, la arista basal es la arista a del poliedro, el número de caras laterales es el número de lados n de la cara correspondiente y la arista lateral de estas pirámides es el circunradio R del poliedro.

El circunradio es, obviamente, directamente proporcional al valor de la arista, es decir, $R = \rho a$, donde la constante de proporcionalidad ρ es el valor del circunradio del poliedro con arista $a = 1$ y por tanto $\frac{1}{\rho}$ es el valor de la arista del poliedro de circunradio unidad. La fórmula del ángulo diedro queda:

$$\cos \delta_n = 1 + \frac{8\rho^2}{1 - 4\rho^2} \cos^2 \frac{\pi}{n}, n \geq 3. \quad (2)$$

Algunos casos notables que usaremos en lo que siguen son:

n	Pirámide	$\cos \delta_n$	n	Pirámide	$\cos \delta_n$
3	Triangular	$\frac{1-2\rho^2}{1-4\rho^2}$	6	Hexagonal	$\frac{1+2\rho^2}{1-4\rho^2}$
4	Cuadrada	$\frac{1}{1-4\rho^2}$	8	Octogonal	$\frac{1+2\sqrt{2}\rho^2}{1-4\rho^2}$
5	Pentagonal	$\frac{1+(\sqrt{5}-1)\rho^2}{1-4\rho^2}$	10	Decagonal	$\frac{1+(\sqrt{5}+1)\rho^2}{1-4\rho^2}$

Cuadro 2: Cosenos de los ángulos interiores de las pirámide regulares

4. Circunradio de los Poliedros Regulares

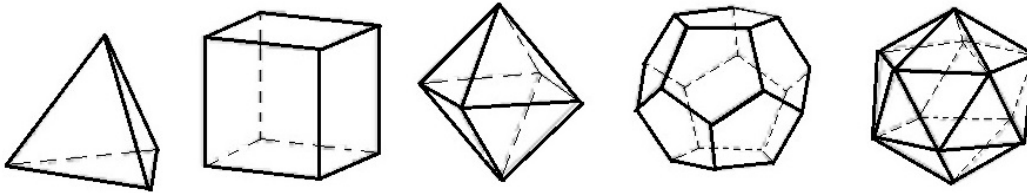


Figura 3: Los cinco Poliedros Regulares

Un poliedro regular con m caras de n lados se puede dividir en m pirámides regulares iguales cuyo vértice es el circuncentro del poliedro, las aristas laterales de la pirámides son circunradios y las aristas de la base son las aristas del poliedro. Si s el número de aristas por vértice, debido a la regularidad, en cualquiera de los vértices del poliedro se unen s pirámides. Tenemos la ecuación:

$$\cos \delta_n = \cos \frac{2\pi}{s}$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos el valor del circunradio para los poliedros regulares de arista unidad. El cuadro (3) muestra el nombre del poliedro regular, su configuración en el vértice, la ecuación del circunradio, y los valores exacto y aproximado del circunradio. La notación $\{n, s\}$ significa que el poliedro tiene s n -ángonos alrededor de cada vértice. Esta notación se debe a Schläfi.

Nombre	Vértice	Ecuación del Circunradio	ρ	Valor Aproximado
Tetraedro	$\{3, 3\}$	$8\rho^2 - 3 = 0$	$\sqrt{6}/4$	0.612372435
Cubo	$\{4, 3\}$	$4\rho^2 - 3 = 0$	$\sqrt{3}/2$	0.866025403
Octaedro	$\{3, 4\}$	$2\rho^2 - 1 = 0$	$\sqrt{2}/2$	0.707106781
Dodecaedro	$\{5, 3\}$	$(6 - 2\sqrt{5})\rho^2 - 3 = 0$	$\frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$	1.401258538
Icosaedro	$\{3, 5\}$	$(12 - 4\sqrt{5})\rho^2 + \sqrt{5} - 5 = 0$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	0.951056516

Cuadro 3: Circunradio de los Poliedros Regulares de Arista Unidad

5. Polinomios de Chebishev

Los polinomios de Chebishev se definen por la relación de recurrencia:

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Y están caracterizados por la propiedad $\cos n\omega = T_n(\cos \omega)$. Esta y otras propiedades de los polinomios de Chebishev pueden consultarse en [1] y [3].

Algunos polinomios con sus correspondientes fórmulas de ángulo múltiple son:

Polinomio	Fórmula de ángulo múltiple
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$\cos 2\omega = 2 \cos^2 \omega - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$\cos 3\omega = 4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$\cos 4\omega = 8 \cos^4 \omega - 8 \cos^2 \omega + 1$

Cuadro 4: Polinomios de Chebishev

6. Circunradio de Poliedros Uniformes con 2 tipos de caras

Si en un vértice de un poliedro uniforme se juntan r polígonos de m lados y s polígonos de n lados, los ángulos diédricos de las pirámides δ_m y δ_n satisfacen:

$$r \cdot \delta_m + s \cdot \delta_n = 2\pi \quad (3)$$

hay dos casos, el primero $r = s = 2$ y el segundo $r = 1$.

6.1. Circunradios del Cuboctaedro y el Icosidodecaedro

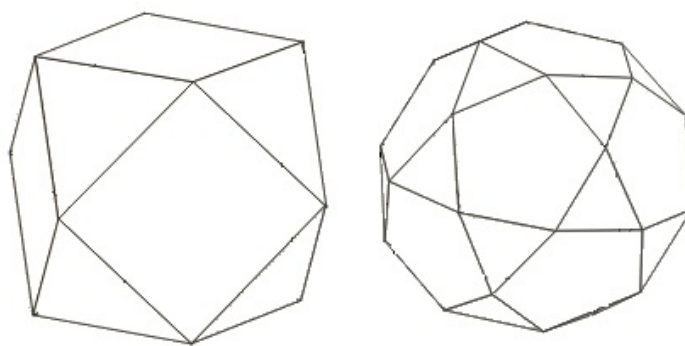


Figura 4: Cuboctaedro e Icosidodecaedro

Si en la ecuación (3) $r = s = 2$, como ocurre con el cuboctaedro y el icosidodecaedro, tenemos

$$2 \cdot \delta_m + 2 \cdot \delta_n = 2\pi \Rightarrow \delta_m + \delta_n = \pi \Rightarrow \cos \delta_m = \cos(\pi - \delta_n) \Rightarrow \cos \delta_m + \cos \delta_n = 0.$$

Por tanto:

Poliedro	Configuración Vértice	Ecuación	Ecuación simplificada
Cuboctaedro	$\{3, 2\} + \{4, 2\}$	$\cos \delta_3 + \cos \delta_4 = 0$	$1 - \rho^2 = 0$
Icosidodecaedro	$\{3, 2\} + \{5, 2\}$	$\cos \delta_3 + \cos \delta_5 = 0$	$(3 - \sqrt{5})\rho^2 - 2 = 0$

Cuadro 5: Ecuaciones de los circunradios del cuboctaedro y del icosidodecaedro

Resolviendo dichas ecuaciones obtenemos los resultados:

Poliedro	Circunradio ρ	Valor Aproximado
Cuboctaedro	1	1
Icosidodecaedro	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1.618033988749

Cuadro 6: Circunradios del Cuboctaedro y del Icosidodecaedro

6.2. Circunradios de los arquimedianos truncados

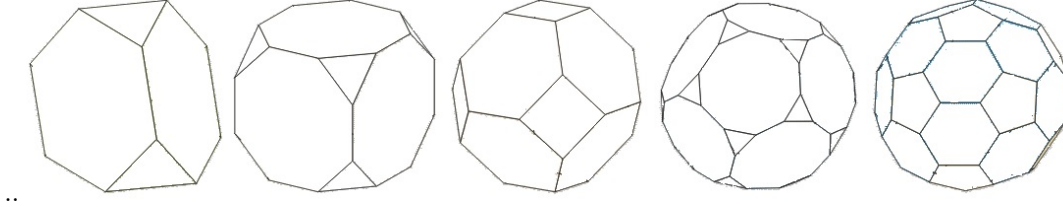


Figura 5: Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro Truncados

Si en la ecuación (3) $r = 1$, como ocurre en la mayoría de los casos, tenemos:

$$\cos(2\pi - \delta_m) = \cos s \cdot \delta_n \Rightarrow \cos \delta_m = T_s(\cos \delta_n)$$

Sustituyendo $\cos \delta_m$ y $\cos \delta_n$ en función del circunradio ρ del poliedro con arista unidad, obtenemos una ecuación que caracteriza a dicho circunradio.

En lo que sigue la notación $\{m, r\} + \{n, s\}$ significa que el poliedro tiene r m -ángonos y s n -ángonos alrededor de cada vértice.

Los poliedros que se obtienen al truncar los vértices de los poliedros regulares tienen la configuración en los vértices que se indican y los circunradios satisfacen las ecuaciones que se muestran en el cuadro 7. Resolviendo dichas ecuaciones obtenemos los circunradios de los poliedros arquimedianos con arista unidad que se nombran en el cuadro 8.

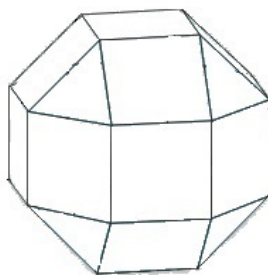
Poliedro	Vértice	Ecuación	Ecuación simplificada
Tetraedro Truncado	$\{3, 1\} + \{6, 2\}$	$\cos \delta_3 = T_2(\cos \delta_6)$	$8\rho^2 - 11 = 0$
Cubo Truncado	$\{3, 1\} + \{8, 2\}$	$\cos \delta_3 = T_2(\cos \delta_8)$	$4\rho^2 - (7 + 4\sqrt{2}) = 0$
Octaedro Truncado	$\{4, 1\} + \{6, 2\}$	$\cos \delta_4 = T_2(\cos \delta_6)$	$2\rho^2 - 5 = 0$
Dodecaedro Truncado	$\{3, 1\} + \{10, 2\}$	$\cos \delta_3 = T_2(\cos \delta_{10})$	$2(\sqrt{5} - 3)\rho^2 + 9 + 2\sqrt{5} = 0$
Icosaedro Truncado	$\{5, 1\} + \{6, 2\}$	$\cos \delta_5 = T_2(\cos \delta_6)$	$4(3 - \sqrt{5})\rho^2 + \sqrt{5} - 21 = 0$

Cuadro 7: Ecuaciones Circunradio de Arquimedianos Truncados

Poliedro	Circunradio ρ	Valor Aproximado
Tetraedro Truncado	$\frac{1}{4}\sqrt{22}$	1.172603939955
Cubo Truncado	$\frac{1}{2}\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$	1.778823645663
Octaedro Truncado	$\frac{1}{2}\sqrt{10}$	1.581138830084
Dodecaedro Truncado	$\frac{1}{4}\sqrt{74 + 30\sqrt{5}}$	2.969449015863
Icosaedro Truncado	$\frac{1}{4}\sqrt{58 + 18\sqrt{5}}$	2.478018659067

Cuadro 8: Circunradios Arquimedianos truncados

6.3. Pequeño Rombicuboctaedro



..

Figura 6: Pequeño Rombicuboctaedro

El pequeño rombicuboctaedro tiene la configuración en los vértices $\{3, 1\} + \{4, 3\}$, por lo tanto el circunradio satisface la ecuación $\cos \delta_3 = T_3(\cos \delta_4)$, que simplificando queda:

$$16\rho^4 - 40\rho^2 + 17 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación bicuadrada obtenemos el circuncentro:

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \simeq 1,398966325966$$

6.4. Circunradio del Cubo Romo.

El cubo romo tiene la configuración en los vértices $\{4, 1\} + \{3, 4\}$, por lo tanto el circunradio satisface la ecuación $\cos \delta_4 = T_4(\cos \delta_3)$, que simplificando queda:

$$32\rho^6 - 80\rho^4 + 44\rho^2 - 7 = 0$$

La única raíz positiva de esta ecuación es:

$$\rho = \frac{1}{6} \sqrt{30 + 3\sqrt{199 + 3\sqrt{33}} + 3\sqrt{199 - 3\sqrt{33}}} \simeq 1,34371337374460170127.$$

Se puede expresar ρ en función de la constante t , llamada constante de tribonacci, que es la única raíz real positiva del polinomio $x^3 - x^2 - x - 1$, y cuyo valor es

$$t = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} \right) \simeq 1,83928675521416113255 \quad (4)$$

Si en la ecuación del circunradio hacemos el cambio de variable $\rho = \sqrt{z}$ y luego la transformación de Tschirnhausen $z = \frac{3-t}{8-4t}$, obtenemos la ecuación $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$. Por tanto:

$$\rho = \sqrt{\frac{3-t}{8-4t}} \text{ siendo } t \text{ la constante de tribonacci.}$$

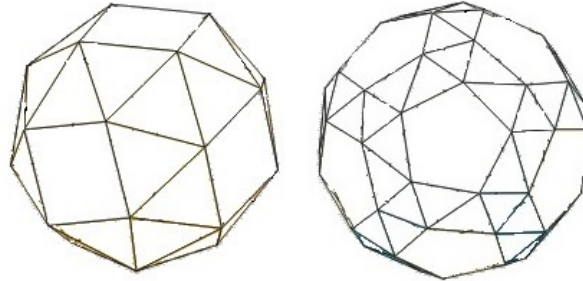


Figura 7: Cubo Romo y Dodecaedro Romo

6.5. Circunradio del Dodecaedro Romo.

El dodecaedro romo tiene la configuración en los vértices $\{3, 4\} + \{5, 1\}$, por lo tanto el circunradio satisface la ecuación $\cos \delta_5 = T_4(\cos \delta_3)$, que simplificando queda:

$$128\rho^6 - 16(27 + 7\sqrt{5})\rho^4 + 4(63 + 19\sqrt{5})\rho^2 - 41 - 13\sqrt{5} = 0$$

cuya única solución positiva es:

$$\rho = \sqrt{\frac{9}{8} + \frac{7}{24}\sqrt{5} + \sqrt[3]{\frac{71}{48} + \frac{2285}{3456}\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{793}{147456} + \frac{133}{55296}\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\frac{71}{48} + \frac{2285}{3456}\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{793}{147456} + \frac{133}{55296}\sqrt{5}}}$$

Cuyo valor aproximado es $\rho = 2,15583737511563970183$.

6.6. Circunradio de los Prismas

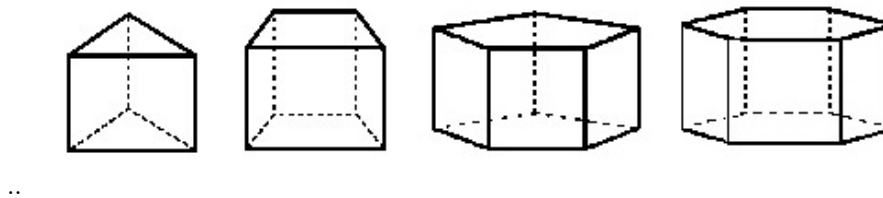


Figura 8: Prisma triangular, Cubo y Prismas pentagonal y hexagonal

Sea R el circunradio del prisma regular de altura a y base el polígono de n lados cuyo lado vale a . Si r es el circunradio de la base,

$$r = a : 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos: $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2 \sin \omega}\right)^2$ siendo $\omega = \frac{\pi}{n}$. Operando tenemos que el circunradio $\rho = \frac{R}{a}$ de un prisma regular de arista unidad y n lados de base es:

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \omega}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \cot^2 \omega}$$

Algunos casos interesantes se muestran en la tabla:

n	Circunradio ρ	Aproximación	n	ρ	Aproximación
3	$\frac{1}{6} \sqrt{21}$	0.763762615	8	$\frac{1}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$	1.398966326
4	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	0.866025403	10	$\frac{1}{2} \sqrt{7 + 2\sqrt{5}}$	1.693527085
5	$\frac{1}{2} \sqrt{3 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$	0.986715155	12	$\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4\sqrt{3}}$	1.995507657
6	$\frac{1}{2} \sqrt{5}$	1.118033989			

Cuadro 9: Circunradios de Prismas con arista unidad

6.7. El Circunradio de los Antiprismas

En un antiprisma de n lados la configuración en cada vértice es un polígono de n lados y tres triángulos, luego $\cos \delta_m = T_3(\cos \delta_3)$ y por tanto:

$$1 + \frac{8\rho^2 \cos^2 \omega}{1 - 4\rho^2} = T_3 \left(\frac{1 - 2\rho^2}{1 - 4\rho^2} \right), \quad \omega = \frac{\pi}{n}$$

Operando y simplificando obtenemos la ecuación bicuadrada:

$$64(1 - \cos^2 \omega) \rho^4 + 16(2 \cos^2 \omega - 3) \rho^2 + 9 - 4 \cos^2 \omega = 0$$

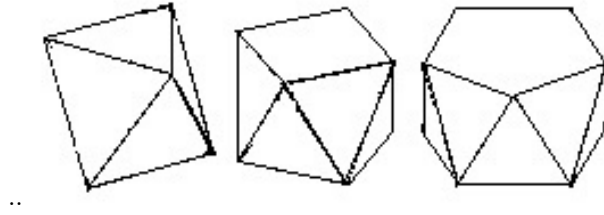


Figura 9: Antiprismas triangular, cuadrado y pentagonal

Resolviendo esta ecuación:

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{2 \cos \omega \pm 3}{8 (\cos \omega + 1)}} (\cos \omega - 1)$$

Expresando las soluciones en función del ángulo $\varphi = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2n}$, tenemos

$$\rho = \pm \frac{1}{4} \sqrt{4 + \sec^2 \varphi}, \rho = \pm \frac{1}{4} \sqrt{4 + \csc^2 \varphi}$$

Obviamente las raíces negativas no nos sirven y la raíz $\rho = \frac{1}{4} \sqrt{4 + \sec^2 \varphi}$ tampoco pues

$$\rho = \frac{1}{4} \sqrt{4 + \sec^2 \frac{\pi}{2n}} \varphi \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = r$$

siendo r el circunradio de la base del antiprisma. La única solución con sentido geométrico es:

$$\rho = \frac{1}{4} \sqrt{4 + \csc^2 \frac{\pi}{2n}}$$

Algunos casos interesantes se muestran en la tabla:

n	Circunradio ρ	Valor Aprox.	n	Circunradio	Valor Aprox.
2	$\frac{1}{4}\sqrt{6}$	0.612372435	6	$\frac{1}{2}\sqrt{3 + \sqrt{3}}$	1.087663874
3	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707106781	8	$\frac{1}{2}\sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{5 + \frac{7}{2}\sqrt{2}}}$	1.735548581
4	$\frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{2}}$	0.822664388	10	$\frac{1}{4}\sqrt{16 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{50 + 22\sqrt{5}}}$	1.674504744
5	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	0.951056516	12	$\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{6}}$	1.979511943

Cuadro 10: Circunradios de los Antiprismas

7. Circunradio de Arquimedianos con 3 tipos de caras.

Si en cada vértice del poliedro se juntan un polígono de m lados, otro de n lados y r polígonos de p lados, se cumple la relación $\delta_m + \delta_n + r \cdot \delta_p = 2\pi$, luego $T_r(\cos \delta_p) = \cos \delta_m \cdot \cos \delta_n - \sqrt{1 - \cos^2 \delta_m} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \delta_n}$ y racionalizando tenemos:

$$(\cos \delta_m \cdot \cos \delta_n - T_r(\cos \delta_p))^2 - (1 - \cos^2 \delta_m) \cdot (1 - \cos^2 \delta_n) = 0,$$

7.1. Gran Rombicuboctaedro y el Gran Rombicosidodecaedro

Para el Gran Rombicuboctaedro y el Gran Rombicosidodecaedro $r = 1$, luego:

$$\cos^2 \delta_m + \cos^2 \delta_n + \cos^2 \delta_p - 2 \cos \delta_m \cos \delta_n \cos \delta_p = 1$$

Aplicando a esta fórmula los valores correspondientes y simplificando, obtenemos las ecuaciones del circunradio del poliedro con arista unidad que se muestran en el cuadro (11).

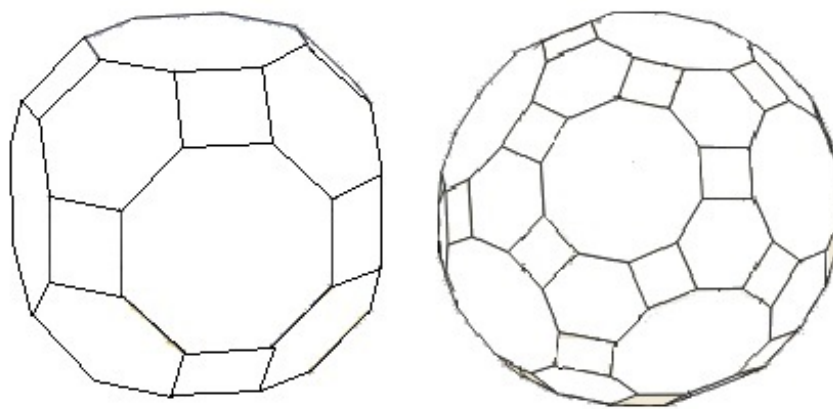


Figura 10: Gran Rombicuboctaedro y Gran Rombicosidodecaedro

Poliedro	Vértice	Ecuación
Gran Rombicuboctaedro	$\{4\} + \{6\} + \{8\}$	$4\rho^2 - 13 - 6\sqrt{2} = 0$
Gran Rombicosidodecaedro	$\{4\} + \{6\} + \{10\}$	$4(3 - \sqrt{5})\rho^2 - 33 - 5\sqrt{5} = 0$

Cuadro 11: Ecuaciones del Circunradio

Resolviendo las ecuaciones obtenemos:

Poliedro	Circunradio ρ	Valor Aproximado
Gran Rombicuboctaedro	$\frac{1}{2}\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$	2.317610913
Gran Rombicosidodecaedro	$\frac{1}{2}\sqrt{31 + 12\sqrt{5}}$	3.8023945

Cuadro 12: Circunradios

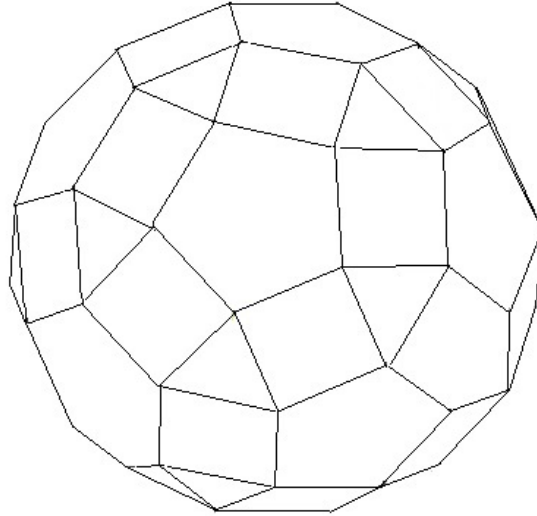


Figura 11: Pequeño Rombicosidodecaedro

7.2. Pequeño Rombicosidodecaedro

El Pequeño Rombicosidodecaedro tiene en cada vértices la configuración $\{3\} + \{5\} + 2\{4\}$, es decir, $r = 2$ y $m = 3, n = 5$ y $p = 4$, por tanto:

$$(\cos \delta_3 \cdot \cos \delta_5 - 2 \cos^2 \delta_4 + 1)^2 - (1 - \cos^2 \delta_3) \cdot (1 - \cos^2 \delta_5) = 0,$$

Simplificando:

$$16(7 - 3\sqrt{5})\rho^4 + 8(7\sqrt{5} - 17)\rho^2 + 51 - 15\sqrt{5} = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones positivas:

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}, \rho = \frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$$

La primera no sirve pues el circunradio de un poliedro es mayor que su arista. Luego el circunradio del Pequeño Rombicosidodecaedro de arista unidad vale:

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}} \simeq 2,232950509.$$

8. Volumen de Poliedros Uniformes

En lo que sigue calcularemos el volumen de los poliedros uniformes convexos por descomposición en pirámides regulares. Nos interesa expresar el volumen de una pirámide regular en función de su arista lateral l , su arista basal b y el número de aristas de su base n . Si r es el circunradio de la base, B el área de la base, h la altura de la pirámide y $\omega = \frac{\pi}{n}$ sabemos que

$$b = 2r \sin \omega, B = \frac{nb^2}{4} \cot \omega \text{ y } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4 \sin^2 \omega}}$$

Luego VP_n , el volumen de la pirámide regular de n caras, de arista basal $b = 1$ y lateral ρ es:

$$VP_n = \frac{n}{12} \cot \omega \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4 \sin^2 \omega}}, \text{ siendo } \omega = \frac{\pi}{n} \quad (5)$$

8.1. Volumen de los Poliedros Regulares

El volumen del poliedro regular con m caras de n -lados es m veces el volumen de la pirámide regular de vértice el circuncentro y base una cualquiera de las caras del poliedro. Si la arista del poliedro es a y ρ el circunradio del poliedro de arista unidad la fórmula del volumen es:

$$V = m \cdot VP_n = \frac{m \cdot n}{12} \cot \omega \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4 \sin^2 \omega}} \cdot a^3, \text{ siendo } \omega = \frac{\pi}{n}$$

sustituyendo en esta fórmula ρ por los valores obtenidos anteriormente para los poliedros regulares, obtenemos los resultados que se muestran en el cuadro (13).

Nombre	caras $m\{n\}$	Volumen	Valor Aproximado
Tetraedro	4{3}	$\frac{1}{12} \sqrt{2} \cdot a^3$	0.117851130197735117814a ³
Cubo	6{4}	a^3	a^3
Octaedro	8{3}	$\frac{1}{3} \sqrt{2} \cdot a^3$	0.471404520791031682933a ³
Dodecaedro	12{5}	$\frac{1}{4} (15 + 7\sqrt{5}) \cdot a^3$	7.66311896062463196871a ³
Icosaedro	20{3}	$\frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) \cdot a^3$	2.18169499062491237350a ³

Cuadro 13: Volúmenes de los Poliedros Regulares de arista a

Sustituyendo el valor de la arista a por $\frac{R}{\rho}$ obtenemos las fórmulas que expresan el volumen de los poliedros en función del circunradio R las cuales se muestran en el cuadro 14 junto al tanto por ciento que ocupan en la circunfera.

8.2. Volumen de los poliedros arquimedianos no romos

Un poliedro arquimediano cuya superficie es $m\{r\} + n\{s\}$, es decir, tiene m caras de r lados y n caras de s lados es la suma de las $m + n$ pirámides regulares con vértice en el circuncentro en las cuales se divide. Por tanto, el volumen de los poliedros arquimedianos no romos de arista unidad es:

$$V = mVP_r + nVP_s$$

Nombre	Volumen	Valor Aproximado	% Esfera
Tetraedro	$\frac{8}{27}\sqrt{3}R^3$	$0,513200239279R^3$	12.25
Cubo	$\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$	$1,53960071783R^3$	36.76
Octaedro	$\frac{4}{3}R^3$	$1,33333333333R^3$	31.83
Dodecaedro	$\frac{2}{9}(5\sqrt{3} + \sqrt{15})R^3$	$2,78516386312R^3$	66.49
Icosaedro	$\frac{2}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}R^3$	$2,53615071012R^3$	60.55

Cuadro 14: Volúmenes poliedros Regulares en función del Circunradio R

Análogamente si el poliedro tiene una configuración $m\{r\} + n\{s\} + p\{t\}$ la fórmula del volumen es:

$$V = mVP_r + nVP_s + sVP_t$$

Aplicando a estas fórmulas los valores de los circunradios obtenidos anteriormente para los poliedros arquimedianos no romos, y operando obtenemos los resultados que se muestran en la tabla. El

Poliedro	Caras	Volumen	Valor Aprox.
Tetraedro Truncado	$4\{3\} + 4\{6\}$	$\frac{23}{12}\sqrt{2}$	2.7105759
Cubo Truncado	$8\{3\} + 6\{8\}$	$\frac{1}{3}(21 + 14\sqrt{2})$	13.5996632
Octaedro Truncado	$8\{6\} + 6\{4\}$	$8\sqrt{2}$	11.3137085
Dodecaedro Truncado	$20\{3\} + 12\{10\}$	$\frac{5}{12}(99 + 47\sqrt{5})$	85.0396645
Icosaedro Truncado	$20\{6\} + 12\{5\}$	$\frac{1}{4}(125 + 43\sqrt{5})$	55.2877307
Cuboctaedro	$8\{3\} + 6\{4\}$	$\frac{5}{3}\sqrt{2}$	2.3570226
Icosidodecaedro	$20\{3\} + 12\{5\}$	$\frac{1}{6}(45 + 17\sqrt{5})$	13.8355594
P. Rombicuboctaedro	$8\{3\} + 18\{4\}$	$\frac{1}{3}(12 + 10\sqrt{2})$	8.714045208
G. Rombicuboctaedro	$12\{4\} + 8\{6\} + 6\{8\}$	$22 + 14\sqrt{2}$	41.79898987
P. Rombicosidodecaedro	$20\{3\} + 30\{4\} + 12\{5\}$	$\frac{1}{3}(60 + 29\sqrt{5})$	41.61532378
G. Rombicosidodecaedro	$30\{4\} + 20\{6\} + 12\{10\}$	$95 + 50\sqrt{5}$	206.8033989

Cuadro 15: Volúmenes de los Arquimedianos no Romos de arista unidad

Volumen de los poliedros no romos en función del circunradio R y el tanto por ciento que ocupan en la circun esfera es:

8.3. El Volumen de los Antiprismas

En un antiprisma de arista unidad cada una de las $2n$ pirámides triangulares tiene un volumen $\frac{1}{12}\sqrt{3}R^2 - 1$ y cada una de las dos pirámides regulares de n lados tiene un volumen de

Poliedro	Volumen	Valor Aprox.	% Esfera
Tetraedro Truncado	$\frac{184}{363}\sqrt{11}R^3$	$1,6811541637R^3$	40.13
Cuboctaedro	$\frac{5}{3}\sqrt{2}R^3$	$2,35702260395R^3$	56.27
Cubo Truncado	$\frac{56}{51}\sqrt{\frac{1}{17}(71+8\sqrt{2})}R^3$	$2,41618105343R^3$	57.68
Octaedro Truncado	$\frac{32}{25}\sqrt{5}R^3$	$2,86216701119R^3$	68.33
P.Rombicuboctaedro	$\frac{16}{51}\sqrt{\frac{2}{17}(575+212\sqrt{2})}R^3$	$3,18271701646R^3$	75.98
Dodecaedro Truncado	$\frac{10}{183}\sqrt{\frac{2}{61}(461393-158157\sqrt{5})}R^3$	$3,24783471362R^3$	77.54
Icosidodecaedro	$\frac{1}{6}\sqrt{11\sqrt{5}-5}R^3$	$3,26612462541R^3$	77.97
G.Rombicuboctaedro	$\frac{16}{97}\sqrt{\frac{1}{97}(26103+9964\sqrt{2})}R^3$	$3,35771789409R^3$	80.16
Icosaedro Truncado	$\frac{2}{109}\sqrt{\frac{10}{109}(830361-180203\sqrt{5})}R^3$	$3,63341536474R^3$	86.74
P.Rombicosidodecaedro	$\frac{8}{123}\sqrt{\frac{5}{41}(32171-2276\sqrt{5})}R^3$	$3,73779935903R^3$	89.23
G.Rombicosidodecaedro	$\frac{40}{241}\sqrt{\frac{1}{241}(1154211-460816\sqrt{5})}R^3$	$3,76171728773R^3$	89.80

Cuadro 16: Volúmenes Arquimedianos no Romos en función del circunradio R

$\frac{n}{24} \cot \frac{\pi}{n} \sqrt{4R^2 - \csc^2 \frac{\pi}{n}}$. Si $\varphi = \frac{\pi}{2n}$, el volumen de un antiprisma de n lados con arista unidad es

$$V = \frac{n}{48} \frac{\sqrt{(4 \cos^2 \varphi - 1)^3}}{\cos^2 \varphi \sin \varphi}$$

Operando tenemos

$$V = \frac{n}{48} \frac{\sqrt{(3 - \tan^2 \varphi)^3}}{\tan \varphi}, \text{ siendo } \varphi = \frac{\pi}{2n}.$$

Algunos casos interesantes se muestran en el cuadro 17.

n	Volumen	Vol. Aprox.	n	Volumen	Vol. Aprox.
2	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	0.11785113019	6	$\sqrt{2+2\sqrt{3}}$	2.3375417889
3	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	0.47140452079	8	$\frac{2}{3}\sqrt{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{146+103\sqrt{2}}}$	4.2679567504
4	$\frac{1}{3}(\sqrt[4]{2}+\sqrt{8})$	0.95699998183	10	$\frac{5}{6}\sqrt{2\sqrt{650+290\sqrt{5}}-2-2\sqrt{5}}$	6.74928787554
5	$\frac{1}{6}(5+2\sqrt{5})$	1.5786893258	12	$\sqrt{28\sqrt{6}+48\sqrt{2}-12\sqrt{3}-20}$	9.781786856245

Cuadro 17: Volúmenes de Antiprismas de arista unidad

Para $n = 2$, el antiprisma es el tetraedro regular y para $n = 3$ el octaedro. El icosaedro regular

está formado por un antiprisma pentagonal y dos pirámides pentagonales regulares. Los antiprismas son parte de varios sólidos de Johnson.

8.4. Volumen del Cubo Romo

El cubo romo tiene 32 caras triangulares y seis cuadradas, luego se descompone en 38 pirámides regulares. Calculemos el volumen del cubo romo de arista unidad aplicando las fórmulas del volumen de la pirámide:

$$V = 32 \frac{\sqrt{3R^2 - 1}}{12} + 6 \frac{\sqrt{4R^2 - 2}}{6} = \frac{8}{3} \sqrt{3R^2 - 1} + \sqrt{4R^2 - 2},$$

Reemplazando R en función de la constante de Tribonacci (4), obtenemos la fórmula:

$$V = \sqrt{\frac{t-1}{2-t}} + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{t+1}{2-t}}$$

Elevando al cuadrado y operando

$$V^2 = \frac{24\sqrt{t^2-1} + 25t + 7}{9(2-t)},$$

La identidad $(62t^2 - 97t - 35)^2 - (62 - 35t)^2(t^2 - 1) = (t^3 - t^2 - t - 1)(2619t - 5069)$ junto a la ecuación característica de la constante de tribonacci $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$ implica

$$\sqrt{t^2 - 1} = \frac{62t^2 - 97t - 35}{62 - 35t}, \text{ si } t \text{ es la constante de tribonacci}$$

Por tanto

$$V^2 = \frac{613t + 203}{9(35t - 62)} \Rightarrow t = \frac{558V^2 + 203}{315V^2 - 613}$$

Reemplazando el valor de t en la ecuación característica de la constante de tribonacci y operando, obtenemos

$$729V^6 - 45684V^4 + 19386V^2 - 12482 = 0$$

Luego

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{188 + \sqrt[3]{6448437 + 45111\sqrt{33}} + \sqrt[3]{6448437 - 45111\sqrt{33}}} \simeq 7,88947739997539020645.$$

8.5. Volumen del Dodecaedro Romo

El dodecaedro romo tiene 80 caras triangulares y 12 pentagonales. Aplicando la fórmula del volumen de la pirámide su volumen es

$$V = \frac{20}{3} \sqrt{3R^2 - 1} + \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})R^2 - \frac{35 + 15\sqrt{5}}{2}}.$$

Usando el valor aproximado de R calculado anteriormente obtenemos que el valor aproximado del volumen del dodecaedro romo de arista unidad es $V \simeq 37,6166$.

Eliminando R entre esta ecuación y la ecuación característica del circunradio obtenemos la siguiente ecuación de grado 12:

$$4353564672V^{12} - 1813985280(719\sqrt{5} + 1883)V^{10} + 629856000(71677\sqrt{5} + 189227)V^8 + 116640000(61151727\sqrt{5} + 134585062)V^6 + 85050000(3046379915\sqrt{5} + 6825930641)V^4 + 675000(4628171926145\sqrt{5} + 10347323869627)V^2 + 20853222016652203125\sqrt{5} + 46629280368208859375 = 0$$

cuyo polinomio tiene dos factores de grado 6.

$$V^6 - \frac{5(3523 + 1431\sqrt{5})}{24}V^4 - \frac{25(113921 + 53549\sqrt{5})}{288}V^2 - \frac{125(69005843 + 30704463\sqrt{5})}{93312} = 0,$$

resolviendo esta ecuación:

$$V = \sqrt{\frac{17615}{72} + \frac{795\sqrt{5}}{8}} + \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{\beta}} + \sqrt[3]{\alpha - \sqrt{\beta}}$$

donde

$$\alpha = \frac{2486533428125}{46656} + \frac{247086456875\sqrt{5}}{10368}$$

y

$$\beta = \frac{70860298451751953125}{11943936} + \frac{213905516865552734375\sqrt{5}}{80621568}$$

Approximately $V \simeq 37,61664996273336297577767$.

8.6. Prismas Regulares

El volumen de un prisma regular con arista y altura unidad es $V = \frac{n}{4} \cot \frac{\pi}{n}$. Podemos expresar V como la raíz de un polinomio con coeficientes enteros y, en muchos casos, calcular la raíz fácilmente. En orden a realizar esta tarea, usaremos la función tangente de ángulo múltiple, definida por la expresión: $R_n(x) = \tan(n \cdot \arctan x)$. Esta función se expresa recursivamente por la fórmula

$$R_n(x) = \begin{cases} x & \text{if } n = 1 \\ \frac{x + R_{n-1}(x)}{1 - R_{n-1}(x)} & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Algunos valores de la función R se muestran en la tabla siguiente:

n	Función	n	Función	n	Función	n	Función
2	$\frac{2x}{1-x^2}$	3	$\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$	4	$\frac{-4x^3+4x}{x^4-6x^2+1}$	5	$\frac{x^5-10x^3+5x}{5x^4-10x^2+1}$

Cuadro 18: Función tangente del ángulo múltiple

De la fórmula

$$V = \frac{n}{4} \cot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n \cdot \arctan \frac{n}{4V} = \pi$$

Obtenemos la ecuación algebraica

$$\text{Numerador} \left(R_n \left(\frac{n}{4V} \right) \right) = 0$$

y el volumen V es la raíz mas grande.

Usando números complejos la ecuación anterior puede expresarse como

$$\frac{1}{i}((4V + in)^n - (4V - in)^n) = 0 \quad (6)$$

Pues $R_n(x) = \frac{1}{i} \frac{(1+ix)^n - (1-ix)^n}{(1+ix)^n + (1-ix)^n}$.

Algunos casos interesantes, para los cuales V se expresa por medio de irracionales cuadráticos se muestran en el cuadro 19.

n	Volumen	Approx	n	Volumen	Aprox
3	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0.43301270189	12	$6 + 3\sqrt{3}$	11.1961524227
4	1	1	15	$\frac{15}{4} \left(\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)$	17.6423629105
5	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	1.72047740058	16	$4 \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \right)$	20.1093579685
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2.59807621135	20	$5 \left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right)$	31.5687575733
8	$2 + 2\sqrt{2}$	4.82842712474	24	$6 \left(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \right)$	45.5745246763
10	$\frac{5}{2}\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$	7.69420884293	30	$\frac{15}{4} \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} \right)$	71.3577334067

Cuadro 19: Volúmenes de Prismas de arista unidad

Si el número de caras laterales n es un número compuesto, es preferible usar otra ecuación distinta de la (6) para calcular V . Ilustraremos este hecho con un ejemplo: Calcular el volumen del prisma cuya base es el polígono regular de 15 lados.

$$15 \arctan \frac{15}{4v} = \pi \Rightarrow 3 \arctan \frac{15}{4v} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow R_3 \left(\frac{15}{4V} \right) = \tan \frac{\pi}{5}$$

De aquí $\frac{45(16V^2-75)}{4V(16V^2-675)} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ and $V = \frac{15}{4} \left(\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)$.

9. Volumen de los Sólidos de Johnson Circunscribibles

Los sólidos de Johnson son los 92 poliedros convexos con caras regulares con más de un tipo de vértice, es decir que no son uniformes. Los sólidos de Johnson circunscribibles en una esfera son 25 poliedros que están relacionados con los siguientes poliedros uniformes: El octaedro, el icosaedro, el cuboctaedro, el rombicuboctaedro, el rombicoidodecaedro y el icosidodecaedro. A partir de las fórmulas de estos volúmenes y los de las pirámides regulares y las cúpulas podemos calcular el volumen de todos los sólidos de Johnson circunscribibles.

9.1. Pirámides con Caras Regulares

Hay tres casos posibles de pirámides con todas sus caras regulares, es decir, con las aristas iguales $b = l = a$. Aplicando la fórmula queda:

$$VP_n = \frac{n}{12} \cot \omega \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \omega}} \cdot a^3, \omega = \frac{\pi}{n}, n = 3, 4, 5$$

Los nombres de las pirámides y sus volúmenes se muestran en la tabla:

n	Nombre	Volumen	Volumen Aproximado
3	Tetraedro	$\frac{1}{12} \sqrt{2} a^3$	0,11785113 a^3
4	Pirámide Cuadrada J_1	$\frac{1}{6} \sqrt{2} a^3$	0,23570226 a^3
5	Pirámide Pentagonal J_2	$\frac{1}{24} (5 + \sqrt{5}) a^3$	0,301502832 a^3

Cuadro 20: Volúmenes Pirámides Regulares de arista a

Recordemos que la pirámide cuadrada es la mitad del octaedro regular.

9.2. Relacionados con el Icosaedro

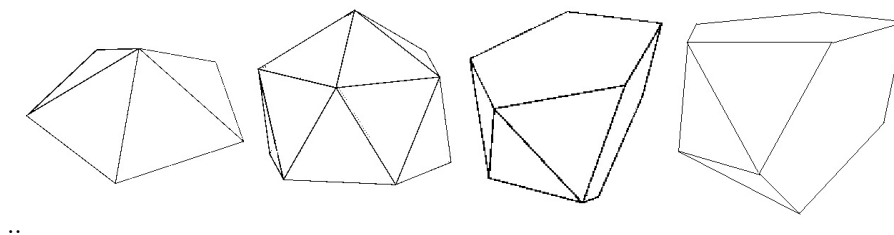


Figura 12: J_2 , J_{11} , J_{62} y J_{63}

Hay 5 circunscribibles de Jonhson relacionados con el icosaedro, la pirámide pentagonal J_2 , y los obtenidos quitandole pirámides pentagonales: la pirámide pentagonal giroelongada J_{11} que se obtiene quitando una, el icosaedro metabidismuido J_{62} obtenido quitando dos pirámides adyacentes y el icosaedro tridismuido J_{63} quitando tres. Si quitamos dos pirámides no adyacentes el resultado es el antiprisma pentagonal. Los volúmenes se obtienen fácilmente y se muestran en la tabla:

9.3. Cúpulas

La cúpula triangular J_3 es la mitad del cuboctaedro. Dos cúpulas triangulares unidas por la base forman o el cuboctaedro o la ortobicúpula triangular J_{27} .

La cúpula cuadrada es un trozo del pequeño rombicuboctaedro y la cúpula pentagonal es un trozo del pequeño rombicododecaedro. Los circunradios de estos sólidos son los de los cuerpos arquimedianos que los contienen. El volumen de la cúpula triangular es la mitad del cuboctaedro. Calcular el

Poliedro	Volumen	Aproximación
Icosaedro	$\frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})$	2.181694991
Pirámide Pentagonal J_2	$\frac{1}{24}(5 + \sqrt{5})$	0.301502832
Pirámide Pentagonal Giroelongada J_{11}	$\frac{1}{24}(25 + 9\sqrt{5})$	1.880192158
Icosaedro Metabidismuido J_{62}	$\frac{1}{6}(5 + 2\sqrt{5})$	1.578689326
Icosaedro Tridismuido J_{63}	$\frac{1}{24}(15 + 7\sqrt{5})$	1.277186493

Cuadro 21: Volúmenes Sólidos de Johnson de arista unidad relacionados con el Icosaedro

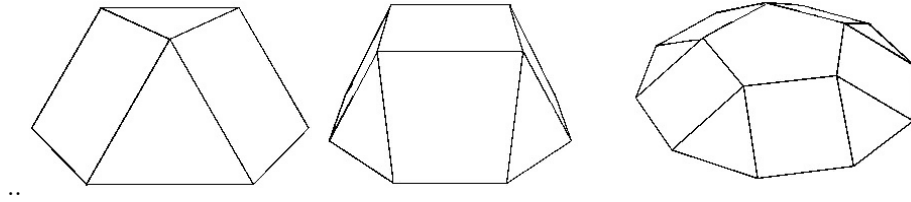


Figura 13: Cúpulas triangular, cuadrada y pentagonal

volumen de las otras dos cúpulas se puede hacer de la siguiente forma: Si la configuración de la cúpula es $1\{n\} + n\{4\} + n\{3\} + 1\{2n\}$ el volumen de la cúpula de arista unidad es:

$$V = VP_n + nVP_4 + nVP_3 - VP_{2n}$$

Tenemos que el volumen de la cúpula cuadrangular es

$$V = 5VP_4 + 4VP_3 - VP_8$$

Puesto que $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$, tenemos que $VP_4 = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{2})$, $VP_3 = \frac{1}{24}(3 + \sqrt{2})$, y $VP_8 = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{2})$, luego

$$V = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Analogamente el volumen de la cúpula pentagonal es

$$V = VP_5 + 5VP_4 + 5VP_3 - VP_{10}$$

y el circunradio es $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$, luego $VP_5 = \frac{1}{8}(5 + 2\sqrt{5})$, $VP_4 = \frac{1}{6}(2 + \sqrt{5})$, $VP_3 = \frac{1}{24}(3 + 2\sqrt{5})$ y $VP_{10} = \frac{1}{12}(25 + 10\sqrt{5})$. El volumen es por tanto

$$V = \frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{5})$$

Resumiendo

Poliedro	Volumen	Vol. Aproximado
Cúpula Triangular	$\frac{5}{6}\sqrt{2}$	0.589255651
Cúpula Cuadrada	$1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$	1.471404521
Cúpula Pentagonal	$\frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{5})$	2.324045318

Cuadro 22: Volúmenes de cúpulas de arista unidad

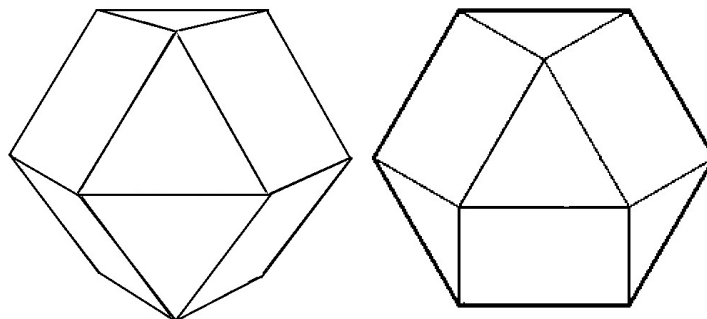


Figura 14: La ortobicúpula triangular y el cuboctaedro

9.4. Relacionados con el Cuboctaedro

La cúpula triangular J_3 es la mitad del cuboctaedro. La ortobicúpula triangular J_{27} es parecida al cuboctaedro, se diferencia de éste en que los triángulos de las cúpulas constituyentes tienen un lado común y los cuadrados también. Su volumen es igual que el del cuboctaedro.

9.5. Relacionados con el Rombicosidodecaedro

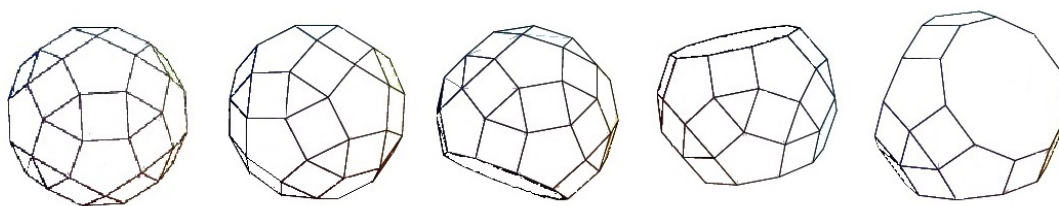


Figura 15: Rombicosidodecaedro, J_{72} , J_{76} , J_{80} y J_{83}

Trece sólidos de Johnson inscribibles están relacionados con el Rombicosidodecaedro. El primero

es la Cúpula Pentagonal, cuatro de ellos, el J_{72} , J_{73} , J_{74} y J_{75} , se obtienen girando, una, dos o tres cúpulas pentagonales; otros cuatro, J_{76} , J_{77} , J_{78} y J_{79} , tienen una menos; otros tres, J_{80} , J_{81} y J_{82} , dos cúpula menos y uno J_{83} una menos. Sus volúmenes son por tanto:

Poliedro	Volumen	Aproximación
Rombicosidodecaedro	$\frac{1}{3}(60 + 29\sqrt{5})$	41.61532378
Cúpula Pentagonal J_5	$\frac{1}{6}(5 + 4\sqrt{5})$	2.324045318
J_{72} , J_{73} , J_{74} y J_{75}	$\frac{1}{3}(60 + 29\sqrt{5})$	41.61532378
J_{76} , J_{77} , J_{78} y J_{79}	$\frac{115}{6} + 9\sqrt{5}$	39.29127846
J_{80} , J_{81} y J_{82}	$\frac{5}{3}(11 + 5\sqrt{5})$	36.96723314
J_{83}	$\frac{35}{2} + \frac{23}{3}\sqrt{5}$	34.64318782

Cuadro 23: Volúmenes de sólidos de Johnson relacionados con el Rombicosidodecaedro

9.6. Relacionados con el Icosidodecaedro

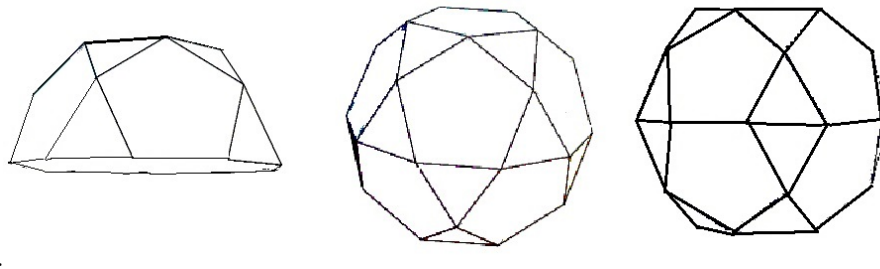


Figura 16: Rotonda Pentagonal, Icosidodecaedro y Ortobirotonda Pentagonal J_{34}

La Rotonda pentagonal J_6 es la mitad del Icosidodecaedro por tanto su volumen es $V = \frac{1}{12}(45 + 75\sqrt{5})$. La ortobirrotonda pentagonal J_{34} se obtiene del Icosidodecaedro girando una Rotonda 36° , por lo cual, ambos cuerpos tienen igual volumen $V = \frac{1}{6}(45 + 17\sqrt{5})$.

10. Epílogo

Con estos datos es fácil calcular el volumen de otros 58 sólidos de Johnson que se obtienen cortando y pegando sólidos plátonicos, arquimedianos y antiprismas. Alguno de los volúmenes de los 9 restantes se pueden consultar en [2].

Referencias

- [1] Burden, R.L. y Faires, J.D., Análisis Numérico, Grupo Editorial IberoAmericana, 1985.
- [2] Castiñeira Merino, Julio, La fórmula del primatoide y el cálculo de volúmenes, Boletín nº 84 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, Febrero de 2010.
- [3] Castiñeira Merino, Julio, Fórmulas de ángulo múltiple, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Número 19, Mayo-Junio 2005.
- [4] Guillén Soler, Gregoria, El Mundo de los Poliedros, Editorial Síntesis, 1991.
- [5] Johnson, N. W. Convex Polyhedra with Regular Faces. *Canad. J. Math.* 18, 169-200, 1966.
- [6] Wenniger, Magnus J. , Polyhedron Models, Cambridge University Press, 1989.