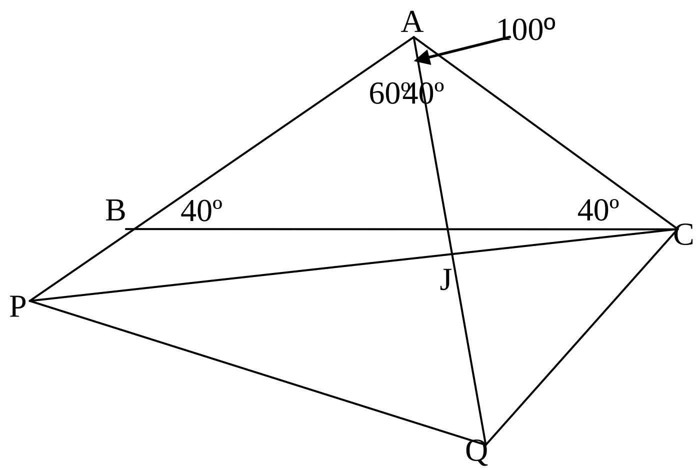
SOLUCIONES ELEMENTALES A PROBLEMAS ELEMENTALES

Darío Durán Cepeda

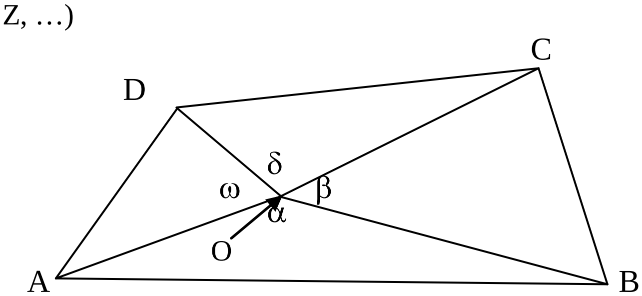
He sido profesor de matemática desde el año de 1960 hasta la fecha y he aprendido que la matemática no se enseña aunque sí se aprende. Mucha gente da estrategias para resolver problemas y yo, que he resuelto, muchos y variados problemas elementales de matemática, no he podido aprender ninguna de esas destrezas que muchos profesores manejan. Creo que en toda solución hay una especie de milagro personal que yo he llamado jocosamente **Teorema de la desesperación**. En las soluciones de los pequeños problemas que a continuación aparecen he usado ese "teorema" personal. Ojalá estos ejemplos sirvan a algunos jóvenes que van a ser profesores de matemática en cualquier nivel educativo.

PROBLEMA #1. El ángulo vertical A de un triángulo isósceles ABC mide 100º. Se prolonga el lado AB hasta el punto P de tal manera que AP = BC. Halle la medida del ángulo BCP.
Solución:



Trace por C una semirrecta que forme un ángulo de 100º con el lado AC del triángulo como se indica en la figura, y sea Q un punto de esa semirrecta tal que CQ = AC. Se deduce que el vértice C está en la mediatriz del segmento AQ. Por otro lado esa igualdad también dice que los triángulos CAQ y ABC son congruentes. Luego, AQ = BC y el ángulo QAC mide 40º,y como el ángulo en A mide 100º, se tendrá que el ángulo PAQ mide 60º. Esto indica que el triángulo APQ es equilátero y P está en la mediatriz del segmento AQ. Es decir, PC es la mediatriz del segmento AQ y, por ende, PC y AQ son perpendiculares y el ángulo en su intersección J es recto. Del triángulo ACJ se ve que $\angle ACP = 50°$ y así $\angle BCP = 10°$.

PROBLEMA #2. Si O es un punto en el interior de un cuadrilátero ABCD tal que $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2[ABCD]$, entonces ABCD es un cuadrado y O es su centro. ([XYZ…] representa el área de laa figura de vértices X, Y, Z, …)
Solución:



Se ve que

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2[ABCD] = 2[AOB] + 2[BOC] + 2[COD] + 2[AOD]$$
$$= OA \cdot OB \cdot \text{sen}\ \alpha + OB \cdot OC \cdot \text{sen}\ \beta + OC \cdot OD \cdot \text{sen}\ \delta + OA \cdot OD \cdot \text{sen}\ \omega$$

ya que el doble del área de un triángulo es el producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.Ya que $0 \le \text{sen } x \le 1$ para todo x, se tiene que

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \le OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OA \cdot OD$$

Al multiplicar por 2 la desigualdad anterior se ve que es equivalente a

$$(OA - OB)^2 + (OB - OC)^2 + (OC - OD)^2 + (OA - OD)^2 \le 0.$$

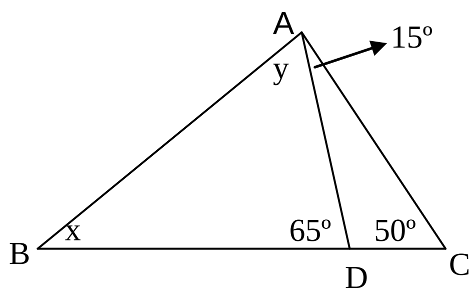
Como el primer miembro es un número no negativo se tendrá que es cero y, por ende, cada uno de los sumandos es cero, y se tiene que OA = OB = OC = OD. Al sustituir en la primera de las igualdades de arriba se obtiene $4 \cdot OA^2 = OA^2 (\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \delta + \text{sen } \omega)$ y por lo tanto

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \delta + \text{sen } \omega = 4.$$

Ya que el máximo valor de cada sumando es uno se tendrá que $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen } \delta = \text{sen } \omega = 1$, de donde $\alpha = \beta = \delta = \omega = 90º$. Los triángulos AOB, BOC, COD, AOD son rectángulos e isósceles. Por ende, los ángulos del cuadrilátero en A, B, C y D son rectos, ABCD es un cuadrado y O es el corte de las diagonales.

PROBLEMA #3. En un triángulo ABC se tiene C = 50º. El punto D está entre B y C ycumple BD = AC y $\angle DAC = 15º$. Halle el valor del ángulo $x = \angle ABC$.

Solución:



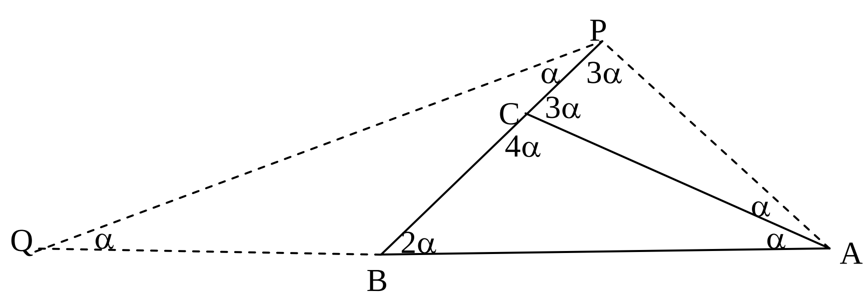
Como $\angle BDA$ es exterior al triángulo ADC se tiene que $\angle BDA = 15º + 50º = 65º$. Si $y = \angle BAD$, entonces en el triángulo ABD se tiene que $x + y + 65º = 180º$ y así

$$x + y = 115º \qquad (*)$$

Supóngase que $x < 50º$. A mayor ángulo mayor lado en el triángulo ABC y se ve que AC < AB. Pero, AC = BD y se tendrá que BD < AB. A mayor lado mayor ángulo en el triángulo ABD y se tiene que $y < 65º$. Al sumar ambas desigualdades se obtiene $x + y < 115º$ lo que contradice a (*). Si se supone que $x > 50º$, entonces las desigualdades se revierten y se ve que $x + y > 115º$ lo cual vuelve a contradecir a (*). En consecuencia, $x = 50º$.

PROBLEMA #4. Los ángulos A, B, C del triángulo ABC son proporcionales a los números 1, 2 y 4, respectivamente. Pruebe que $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}$.

Solución:

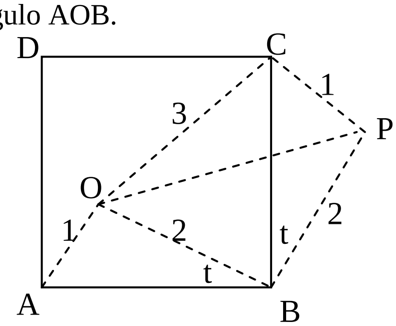


Se colocan los ángulos $A = \alpha$, $B = 2\alpha$, $C = 4\alpha$ y se tiene que

$$180° = A + B + C = 7\alpha \qquad (*)$$

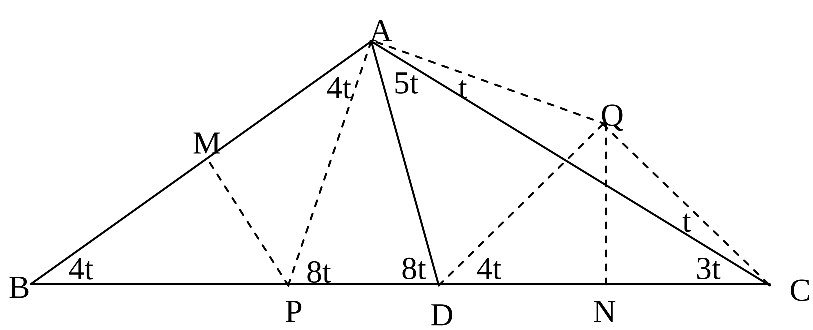
La mediatriz del segmento AB corta la recta BC en el punto P produciendo el triángulo isósceles APB de base AB. Luego, ∠PBA = ∠PAB = 2α y se tiene que ∠PAC = α. Además, AP = BP. De (*) se ve que ∠BPA = 3α y en el ángulo llano BCP se tiene que ∠PCA = 3α, por lo que el triángulo PAC es isósceles y AP = AC. Por otro lado tracemos la recta por P que forma ángulo α con PB y corta a la recta AB en Q. Ya que B = 2α es exterior al triángulo PBQ se tiene que ∠BQP = α y dicho triángulo es isósceles de base PQ. Así, BQ = BP = AP = AC. Por último, los triángulos QAP y ABC son semejantes por tener los mismos ángulos. Luego, $\frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{BC}$, es decir, $\frac{QB+AB}{AB} = \frac{AC}{BC}$. De las igualdades anteriores resulta que $\frac{AC}{AB} + 1 = \frac{AC}{BC}$, y al dividir por AC se obtiene el resultado deseado.

PROBLEMA#5. Las distancias de un punto interior O de un cuadrado ABCD a los vértices A, B y C son 1, 2 y3, respectivamente. Halle el ángulo AOB.
Solución:



Trace por B el segmento BP de igual tamaño que OB = 2 y que forme con el lado BC del cuadrado un ángulo t = ∠ABO. Los triángulos AOB y CPB son congruentes por tener dos lados iguales como sus ángulos comprendidos y resulta que ∠AOB = ∠BPC. Por otro lado, ∠OBP = ∠OBC + t = 90° y el triángulo OBP es rectángulo e isósceles. Luego, ∠OPB = 45°. En el mismo triángulo por Pitágoras se ve que $OP^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ y así $OP = \sqrt{8}$. En el triángulo OCP se tiene que $\left(\sqrt{8}\right)^2 + 1^2 = 3^2$ y se deduce por Pitágoras que el triángulo OCP es rectángulo de hipotenusa OC. Por tanto, ∠OPC = 90°. En consecuencia, ∠AOB = ∠BPC = ∠BPO + ∠OPC = 45° + 90° = 135°.

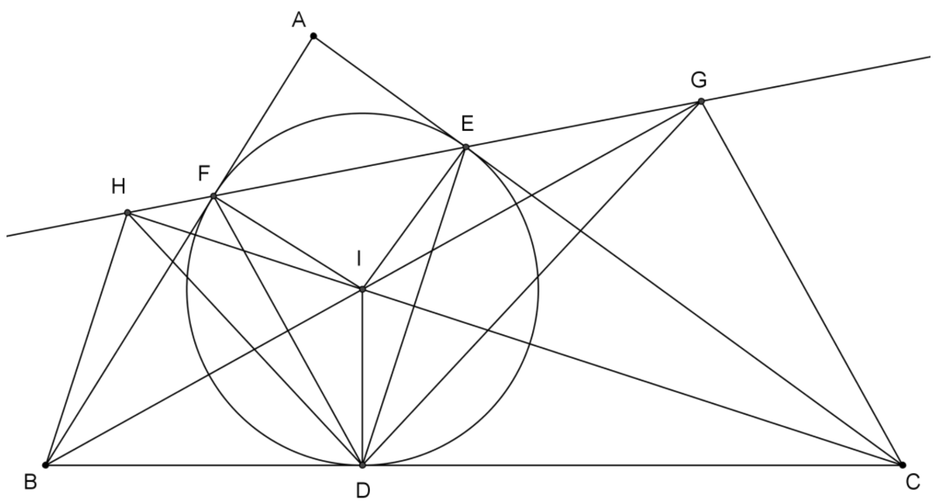
Problema #6. En un triángulo ABC se tiene que B = 4t, C = 3t y D es un punto del lado BC tal que ∠CAD = 5t y AB = DC. Halle el valor de t.
Solución:



Ya que el ángulo ADB es exterior al triángulo ADC se tendrá que ∠ADB = 5t + 3t = 8t. Trace la perpendicular al lado AB por su punto medio M hasta cortar al lado BC en un punto P. El triángulo ABP es isósceles de base AB y así ∠BAP = ∠ABP = 4t. Como ∠APD es exterior al triángulo ABP se tiene que ∠APD = 4t + 4t = 8t y el triángulo APD es isósceles y así AP = AD. Por el punto medio N del segmento CD trace la perpendicular hasta el punto Q tal que NQ = MP. Entonces los triángulos ABP y QDC son congruentes y se tiene que ∠QDC = ∠QCD = 4t y que QD = QC = AP = AD. Por tanto, ∠QCA = 4t – 3t = t. Nótese que el triángulo DAQ es isósceles de base AQ porque AD = DQ. En ese triángulo en el vértice D se ve que $\angle$ADQ +12t = 180°. Además, en ese mismo triángulo se tiene que 2$\angle$DAQ + $\angle$ADQ = 180°. Al comparar las dos últimas igualdades resulta que $\angle$DAQ = $\frac{12t}{2}$ = 6t. Por ende $\angle$QAC = $\angle$QAD – $\angle$DAC = 6t – 5t = t y el triángulo AQC es isósceles de base AC resultando AQ = QC = AD y el triángulo AQD es equilátero. Por consiguiente, $\angle$DAQ = 6t = 60° y se ve que t = 10°.

PROBLEMA #7. Sean D, E y F las proyecciones del incentro I del triángulo ABC sobre los lados BC, AC y AB. Las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo cortan la recta EF en los puntos G y H. Pruebe que los triángulos ABC y DHG son semejantes y tienen el mismo incentro.

Solución:



(1) El cuadrilátero BHFI es cíclico. Comenzamos por observar que los triángulos AFE, BDF y CDE son isósceles porque desde un punto exterior a una circunferencia los segmentos de tangente son iguales. Por ende, $\angle$AFE = $\angle$AEF = 90° – $\frac{A}{2}$, $\angle$BFD = $\angle$BDF = 90° – $\frac{B}{2}$, $\angle$CDE = $\angle$CED = 90° – $\frac{C}{2}$. Ahora en el triángulo CHE se tiene $\angle$CHE + $\angle$HEC + $\angle$ECH = 180º. Pero, $\angle$HEC = 180º – $\angle$AEF = 180º – $\left(90° - \frac{A}{2}\right)$ = 90º + $\frac{A}{2}$. Además, $\angle$ECH = $\frac{C}{2}$ porque CH es la bisectriz del ángulo C en el triángulo ABC. Colocando estos dos valores en la igualdad anterior se obtiene que $\angle$CHE + 90º + $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$ = 180º y así $\angle$IHF = $\angle$CHE = 90º – $\frac{A+C}{2} = \frac{180°-B}{2}$ =$\frac{B}{2}$. Por otro lado, $\angle$FBI = $\frac{B}{2}$ porque BF es la bisectriz del ángulo B en el triángulo ABC. Se ha demostrado que $\angle$IHF = $\angle$FBI = $\frac{B}{2}$ y el cuadrilátero BHFI es cíclico. Análogamente CGEI es cíclico.

(2) Los puntos B, H, F, I y D son concíclicos. En efecto en el cuadrilátero BFID los ángulos opuestos F y D son rectos, luego BFID es cíclico. Esto quiere decir que D está en el circuncírculo del triángulo BFI. Pero, en (1) se vio que H también está en dicho circuncírculo. Por tanto, los puntos B, H, F, I y D son concíclicos. Análogamente C, G, E, I, D son concíclicos.

(3) Como consecuencia de (2) se tiene $\angle$FBH = $\angle$FDH = $\angle$FIH y $\angle$BHI = $\angle$BFI = 90º. por estar inscritos en al arco BI de la circunferencia que pasa por B, H, F, I y D. Además, $\angle$IGC = $\angle$IEC = 90º por estar inscritos en el arco IC de la circunferencia que pasa por los puntos D, I, G, E y C.

(4) Como CH es perpendicular a BH y CH es perpendicular a la recta DE por ser CH bisectriz en el ángulo vertical del triángulo isósceles CDE, las rectas BH y DE son paralelas. Análogamente CG y DF son paralelas.

(5) Los triángulos ABC y DHG son semejantes. En efecto los ángulos DHI y DFI son iguales por estar inscritos en el arco ID de la circunferencia que pasa por los puntos D, B, H y F. Pero, $\angle$DFI = 90º – $\angle$FID = $\frac{B}{2}$. Luego, $\angle$DHI = $\frac{B}{2}$. En (1) se vió que $\angle$IHF = $\frac{B}{2}$. Por tanto, $\angle$DHG = $\angle$DHI + $\angle$IHF = B. Análogamente $\angle$DGH = C y se sigue que ABC y DHG son semejantes por el segundo criterio de semejanza.

(6) Ya se vio que HI es la bisectriz del ángulo DHG y GI es la bisectriz del ángulo HGD. Luego, I es el incentro del triángulo DHG.