Problema 271.

Proposto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sexan ABC un triángulo isóscele, con $AB = AC$; H o seu ortocentro e $A'B'C'$ o seu triángulo órtico. Demostrar que H é o inverso de A respecto da circunferencia de diámetro BC.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $c = AB = AC$, $2a = BC$ e $b = AA'$ e consideremos a referencia cartesiana rectangular onde se teñen as seguintes coordenadas: $A'(0,0)$, $C(a,0)$ e $A(0,b)$.

Como $BA' = A'C$, $B(-a,0)$.

As coordenadas do ortocentro virán caracterizadas por dous feitos:

$H \in AA'$, logo $H(0,h)$, e

$0 = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = (0-(-a), h-0) \cdot (0-a, b-0) = (a,h) \cdot (-a,b) = -a^2 + hb$

$= -A'C^2 + A'H \cdot A'A$, ou equivalentemente, $A'A \cdot A'H = A'C^2$,

que é precisamente a condición para que, por definición, H sexa o inverso de A respecto da circunferencia de de centro A' e raio $A'C$, ou sexa, para que H sexa o inverso de A respecto da circunferencia de diámetro BC, como queriamos demostrar.