Problema 272.
Proposto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España. Dedicado á memoria de José María Pedret.

Sexan dous puntos A e B e unha recta r. Para cada punto M de r, sexa P a intersección da recta AM e a recta perpendicular a BM por B.

1) Demostrar que o lugar geométrico de P ao variar M sobre r é, en xeral, unha cónica.
2) Dados os puntos A e B, achar as rectas r para as que a cónica é unha parábola.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

1) Sexa O o punto medio de AB e introduzamos o sistema de referencia cartesiano rectangular de orixe O e base positivamente orientada de primeiro vector $\overrightarrow{OB}$. Temos así as seguintes coordenadas: $A(-1,0)$ e $B(1,0)$.

Supoñamos que a ecuación da recta r nesa referencia é $r: ax+by=c$ con $a^2+b^2 \neq 0$ e que as coordenadas respectivas de M e P son $M(m,n)$ e $P(p,q)$.

Como M é un punto de r, $am+bn=c$; ao estar M, A e P aliñados,

$$0=\begin{vmatrix} 1 & m & n \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & p & q \end{vmatrix} = -q+pn+n-qm$$ e, por ser $BM \perp BP$,

$$0=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=(m-1,n-0)\cdot(p-1,q-0)=(m-1)(p-1)+nq.$$

Así, o sistema

$$\begin{cases} ax+by=c \\ -qx+(p+1)y=q \\ (p-1)x+qy=p-1 \end{cases}$$

debe ter polo menos unha solución $(x,y)=(m,n)$, o cal implica, polo teorema de Rouché-Fröbenius, que o rango das matrices dos coeficientes e ampliada cos termos independentes deben ser iguais ao número de incógnitas, que neste caso é 2, logo o determinante de dita matriz ampliada debe ser nulo, é dicir,

$$0=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -q & p+1 & q \\ p-1 & q & p-1 \end{vmatrix} = (a-c)p^2+2bpq-(a+c)q^2-2bq-a+c$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a+c & 0 & -b \\ 0 & a-c & b \\ -b & b & -a-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ p \\ q \end{pmatrix},$$ logo o punto $P=(p,q)$ pertence á cónica

de ecuación $$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a+c & 0 & -b \\ 0 & a-c & b \\ -b & b & -a-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=0.$$

2) A cónica anterior é unha parábola se e só se o menor complementario $\begin{vmatrix} a-c & b \\ b & -a-c \end{vmatrix}$ do elemento da fila e columnas primeira da súa matriz asociada é nulo,

é dicir, só e cando $d^2\left(O,r\right)=\left(\frac{\left|a\cdot 0+b\cdot 0-c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{c^2}{a^2+b^2}$ é igual a 1,

ou equivalentemente, se e só se a distancia da recta r ao centro da circunferencia de diámetro AB é igual ao raio da mesma, isto é, só e cando a recta r é tanxente a dita circunferencia.