Problema 274.
Proposto por Andrés Sáez Schwedt, León, España.

No triángulo ABC, con incentro I, a recta AI corta a BC en D, e E é o punto medio de AD. As circunferencias circunscritas de ABD e BCI córtanse noutro punto F, distinto de B. Probar que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Introduzamos coordenadas baricéntricas con respecto ao triángulo de referencia ABC, de lados $a = BC$, $b = BC$ e $c = AB$.
Entón $A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$ e $I = (a:b:c)$.
Ademais, $AI \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, é dicir, $AI \equiv cy = bz$, e $BC \equiv x = 0$, logo $D = (x:y:z)$ con $cy = bz$ e $x = 0$, sendo por tanto as coordenadas baricéntricas absolutas de $D = (x:y:z)$ as seguintes: $D = \left(0 : \frac{b}{b+c} : \frac{c}{b+c}\right)$; o punto medio de AD é, polo tanto,

$$E = \left(\frac{1+0}{2} : \frac{0+\frac{b}{b+c}}{2} : \frac{0+\frac{c}{b+c}}{2} \right) \equiv (b+c:b:c).$$

As circunferencias circunscritas a ABD e a BCI terán por ecuacións
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x+y+z)(ux+vy+wz)$ e
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x+y+z)(u'x+v'y+w'z)$,
onde u, v e w e u', v' e w' se poden obter tendo en conta que, por pertencer A, B e D á primeira e B, C e I á segunda circunferencia,
$a^2 \cdot 0 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \cdot 1 + c^2 \cdot 1 \cdot 0 = (1+0+0)(u \cdot 1 + v \cdot 0 + w \cdot 0)$,
$a^2 \cdot 1 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot 1 = (0+1+0)(u \cdot 0 + v \cdot 1 + w \cdot 0)$ e
$a^2 \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot b = (0+b+c)(u \cdot 0 + v \cdot b + w \cdot c)$, e
$a^2 \cdot 1 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot 1 = (0+1+0)(u' \cdot 0 + v' \cdot 1 + w' \cdot 0)$,
$a^2 \cdot 0 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot 0 = (0+0+1)(u' \cdot 0 + v' \cdot 0 + w' \cdot 1)$ e
$a^2 \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c \cdot a + c^2 \cdot a \cdot b = (a+b+c)(u' \cdot a + v' \cdot b + w' \cdot c)$, ou sexa, $u = 0$, $v = 0$ e $w = \frac{a^2b}{b+c}$, e $v' = 0$, $w' = 0$ e $u' = bc$, sendo polo tanto
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x+y+z)\frac{a^2b}{b+c}z$ e
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = bcx(x+y+z)$
as ecuacións de ditas circunferencias.

Os seus puntos de corte, B e F, están no eixo radical r das mesmas, cuxa ecuación se obtén restando membro a membro esas ecuacións:

$$r \equiv \left(\frac{a^2 b}{b+c} z - bcx\right)(x+y+z) = 0 \Rightarrow a^2 z = c(b+c)x \text{ ou } x+y+z=0 .$$

Se tomamos $x = a^2$, entón $z = c(b+c)$, logo as coordenadas de F serán da forma $F = \left(a^2 : y_F : c(b+c)\right)$, e como F pertence á circunferencia circunscrita a BCI, deducimos que $a^2 y_F c(b+c) + b^2 c(b+c)a^2 + c^2 a^2 y_F = bcx\left(a^2 + y_F + c(b+c)\right)$, co cal $y_F = \frac{b}{2c}\left(a^2 - b^2 + c^2\right)$ e, polo tanto, $F = \left(2ca^2 : b\left(a^2 - b^2 + c^2\right) : 2c^2(b+c)\right)$.

Notemos agora que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC \Leftrightarrow BE$ e BF son rectas conxugadas isogonais de BA e BC.

É sabido que as rectas simétricas de AE con respecto a AI, de BE con respecto a BI e de CE con respecto a CI se cortan nun punto E^{-1}, que se chama isogonal conxugado de $E = (x_E : y_E : z_E)$ e que, ao non pertencer E^{-1} á circunferencia circunscrita a ABC, as súas coordenadas poden obterse do seguinte xeito:

$$E^{-1} = \left(\frac{a^2}{x_E} : \frac{b^2}{y_E} : \frac{c^2}{z_E}\right) = \left(\frac{a^2}{b+c} : \frac{b^2}{b} : \frac{c^2}{c}\right) = \left(\frac{a^2}{b+c} : b : c\right) = \left(a^2 : b(b+c) : c(b+c)\right).$$

Como E^{-1} está sobre a recta simétrica de BE con respecto a BI e $E^{-1} \neq F$, temos que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC \Leftrightarrow B$, F e E^{-1} están aliñados

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2ca^2 & b\left(a^2 - b^2 + c^2\right) & 2c^2(b+c) \\ a^2 & b(b+c) & c(b+c) \end{vmatrix} = 0 ,$$

o cal se cumpre, tal e como queriamos probar.