Problema 275. Proposto polo editor.

Demostrar que, se $p(x)$ é calquera polinomio, entón a ecuación

$$\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+8x\left(x^2-1\right)p'(x)+4\left(3x^2-1\right)p(x)=0$$

ten ao menos dúas raíces reais no intervalo $(-1,1)$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Probaremos que é certo o mesmo resultado no caso máis xeral de que $p(x)$ sexa calquera función continua no intervalo pechado $[-1,1]$ e dúas veces derivable no intervalo aberto respectivo $(-1,1)$ e se existen $p'\left((-1)^+\right)$ e $p'\left(1^-\right)$.

Definamos a función $q(x)=\left(x^2-1\right)^2 p(x)$, que é continua en $[-1,1]$ e dúas veces derivable en $(-1,1)$ por ser produto de funcións continuas en $[-1,1]$ e dúas veces derivables en $(-1,1)$, respectivamente. Entón

$$q'(x)=\left[\left(x^2-1\right)^2\right]' p(x)+\left(x^2-1\right)^2 p'(x)=\left(x^2-1\right)^2 p'(x)+4x\left(x^2-1\right)p(x) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} q''(x)&=\left[\left(x^2-1\right)^2\right]' p'(x)+\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+\left[4x\left(x^2-1\right)\right]' p(x)+4x\left(x^2-1\right)p'(x) \\ &=\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+8x\left(x^2-1\right)p'(x)+4\left(3x^2-1\right)p(x), \end{aligned}$$

logo a ecuación da que hai que probar que ten ao menos dúas raíces reais no intervalo $(-1,1)$ é equivalente á ecuación $q''(x)=0$.

Como a función $q(x)$ é continua en $[-1,1]$, derivable en $(-1,1)$ e tal que $q(-1)=(0=)q(1)$, do teorema de Rolle deducimos que a ecuación $q'(x)=0$ ten polo menos unha raíz real x_1 no intervalo $(-1,1)$, é dicir, que existe ao menos un número real $x_1\in(-1,1)$ tal que $q'(x_1)=0$.

Como se cumpren as hipótesis do mesmo teorema para a función $q'(x)$ nos intervalos $[-1,x_1]$ e $[x_1,1]$, pois é continua neles -é continua en $(-1,1)$ por ser derivable en $(-1,1)$, e é continua á dereita de $x=-1$ e á esquerda de $x=1$ por existir $p'\left((-1)^+\right)$ e $p'\left(1^-\right)$, respectivamente-, derivable nos intervalos abertos respectivos $(-1,x_1)$ e $(x_1,1)$ e $q'(-1)=(0=)q'(x_1)$ e $q'(x_1)=(0=)q'(1)$, concluímos que a ecuación $q''(x)=0$ ten polo menos unha raíz real x_0 no intervalo $(-1,x_1)$ e ao menos unha raíz real x_2 no intervalo $(x_1,1)$, ou sexa, existen polo menos un número real $x_0\in(-1,x_1)$ para o cal $q'(x_1)=0$ e ao menos un número real $x_2\in(x_1,1)$ con $q'(x_2)=0$.

Acabamos así de comprobar que existen polo menos dous números reais x_0 e x_2 situados no intervalo $(-1,1)$ que son raíces da ecuación $q'(x)=0$. Tales números son necesariamente distintos porque pertencen a intervalos disxuntos. Polo tanto, a ecuación $q'(x)=0$ ten ao menos dúas raíces reais, x_0 e x_2, no intervalo $(-1,1)$, como queriamos demostrar.