Problema 272

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España

Consideremos un sistema de ejes de coordenadas rectangulares tomando como eje de abscisas la recta determinada por los puntos A y B y como eje de ordenadas la mediatriz del segmento AB.

Pongamos $A(-a,0)$ y $B(a,0)$, siendo a un número real positivo. Sea $y=mx+n$ la ecuación de la recta r y (α,β) las coordenadas de M. Entonces,

$$\beta = m\alpha + n \tag{1}$$

y las coordenadas (x,y) del punto P satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones formado por las de las rectas AM y perpendicular a BM por B, a saber:

$$y = \frac{\beta}{a+\alpha}(x+a)$$

y

$$y = \frac{a-\alpha}{\beta}(x-a)$$

Despejamos α y β, obteniendo

$$\alpha = \frac{a\left(a^2-x^2+y^2\right)}{a^2-x^2-y^2} \qquad \beta = \frac{2ay(a-x)}{a^2-x^2-y^2}$$

Al sustituir estas expresiones de α y β en (1), se obtiene, después de simplificar, la ecuación

$$(am+n)x^2 + (-am+n)y^2 - 2axy + 2a^2y - a^2(am+n) = 0 \tag{2}$$

que es, en general, la de una cónica, como se quería.

Dicha ecuación será la de una parábola si y solo si se cumplen las condiciones

$$\begin{vmatrix} am+n & -a & 0 \\ -a & -am+n & a^2 \\ 0 & a^2 & -a^2(am+n) \end{vmatrix} \neq 0$$

y

$$\begin{vmatrix} am+n & -a \\ -a & -am+n \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$a^2(am-n)(am+n)^2 \neq 0 \tag{3}$$

y

$$n^2 - a^2m^2 - a^2 = 0 \tag{4}$$

Escrita esta última en la forma $(n-am)(n+am) = a^2$ nos revela, habida cuenta de que $a \neq 0$, que cada uno de los factores del primer miembro es dintinto de cero. Por consiguiente, (4) implica (3).

Se concluye, pues, que (2) es la ecuación de una parábola si y solo si $n^2 - a^2m^2 - a^2 = 0$, si y solo si $n = \pm a\sqrt{1+m^2}$, con lo que la ecuación (en el sistema de coordenadas que hemos adoptado) de las rectas pedidas es

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}, \qquad m \in \mathbb{R}$$