Problema 271

Sean ABC un triángulo isósceles, con AB = AC; H su ortocentro y A’B’C’ su triángulo órtico. Demostrar que H es el inverso de A respecto de la circunferencia de diámetro BC.

Solución

Es muy conocido que en cualquier triángulo, el simétrico del ortocentro respecto a cualquiera de sus lados yace en la circunferencia circunscrita.

La demostración es por otra parte sencilla. Sea ABC el triángulo de referencia, A’, B’, C’ su triángulo órtico y H’ el simétrico de H respecto del lado a = BC. Se tiene que <H’BC = <CBH por la simetría. Por otra parte, <CBH = H’AC, pues sus lados son respectivamente perpendiculares y ambos son agudos. Por Tanto <H’BC = <H’AC y los cuatro puntos A, B, C y H’ son concíclicos.

Volviendo al triángulo del enunciado, sea entonces H’ el simétrico de H respecto al lado BC. Por potencia de A’, que es el punto medio del lado BC, respecto a la circunferencia circunscrita, se tiene que A’H·A’A = H’A’·A’A = A’B·A’C = r^2, siendo r el radio de la circunferencia de diámetro BC. Por tanto A y H son inversos respecto de tal circunferencia

Ignacio Larrosa Cañestro

(profesor de enseñanza secundaria jubilado)