

Problemas para os máis novos 54.

1. Se un ángulo dun cuadrilátero cíclico é igual ao que forman as súas diagonais, entón dous lados consecutivos do cuadrilátero son iguais, e reciprocamente.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $ABCD$ o cuadrilátero cíclico, O o centro da súa circunferencia circunscrita e E o punto de corte das súas diagonais AC e BD . Utilizaremos os feitos coñecidos de que un ángulo interior nunha circunferencia coincide coa semisuma dos ángulos centrais asociados aos arcos que abarca dito ángulo interior e un ángulo inscrito nunha circunferencia é igual á metade do ángulo central asociado.

Vexamos que os lados consecutivos AB e BC do cuadrilátero $ABCD$ son iguais se e só se o ángulo interior no vértice A do cuadrilátero cíclico $ABCD$, $\angle BAD$, é igual ao ángulo $\angle AEB$ que forman as súas diagonais:

$$\begin{aligned} AB = BC &\Leftrightarrow \angle AOB = \angle BOC \Leftrightarrow \angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle COD \Leftrightarrow 2\angle AEB = \angle BOD \\ &\Leftrightarrow \angle AEB = \angle BOD/2 \Leftrightarrow \angle AEB = \angle BAD. \end{aligned}$$

O enunciado queda, polo tanto, demostrado.