Problemas para os máis novos 54.

2. Se a e b son números reais positivos, demostrar que

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Probaremos as desigualdades por separado elevando ao cadrado e illando as raíces:

Sendo $a>0$ e $b>0$, $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^4}{4(a+b)^2} = \left[\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\right]^2 \leq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \sqrt{2ab(a^2+b^2)} + ab$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2ab(a^2+b^2)} \leq \frac{a^2+b^2}{2} + ab - \frac{(a-b)^4}{4(a+b)^2} = \frac{(a+b)^4 + 8ab(a^2+b^2)}{4(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2ab(a^2+b^2) = \left[\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\right]^2 \leq \left[\frac{(a+b)^4 + 8ab(a^2+b^2)}{4(a+b)^2}\right]^2$$

$$= \frac{(a+b)^8 + 16ab(a^2+b^2)(a+b)^4 + 64a^2b^2(a^2+b^2)^2}{16(a+b)^4}$$

$$\Leftrightarrow 32ab(a^2+b^2)(a+b)^4 \leq (a+b)^8 + 16ab(a^2+b^2)(a+b)^4 + 64a^2b^2(a^2+b^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a+b)^8 - 16ab(a^2+b^2)(a+b)^4 + 64a^2b^2(a^2+b^2)^2 = \left[(a+b)^4 - 8ab(a^2+b^2)\right]^2$$

$$= (a-b)^8,$$

o cal se cumpre, obténdose ademais a igualdade se e só se $a-b=0$, isto é, só e cando $a=b$.

Analogamente, $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \dfrac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} - \sqrt{2ab(a^2+b^2)} + ab = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right)^2 \leq \left[\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}\right]^2 = \frac{(a-b)^4}{2(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{2} + ab - \frac{(a-b)^4}{2(a+b)^2} \leq \sqrt{2ab(a^2+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16a^2b^2(a^2+b^2)^2}{(a+b)^4} = \left[\frac{4ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2}\right]^2 \leq \left[\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\right]^2 = 2ab(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 8a^2b^2(a^2+b^2)^2 \leq ab(a^2+b^2)(a+b)^4 \Leftrightarrow 0 \leq ab(a^2+b^2)\left[(a+b)^4 - 8ab(a^2+b^2)\right]$$

$$= ab(a^2+b^2)(a-b)^4,$$

que tamén se verifica, dándose a igualdade, coma antes, se e só se $a=b$.