Problemas para os máis novos 54.

3. Considérase un triángulo cuxos lados miden 1, r e r^2. Determine todos os valores de r de maneira que o triángulo sexa rectángulo.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Se $0 < r < 1$, entón $r^2 < r < 1$ e, polo tanto, o lado maior do triángulo mide 1. Polo teorema de Pitágoras e o seu recíproco, o triángulo será rectángulo se e só se $1^2 = \left(r^2\right)^2 + r^2$, ou equivalentemente, só e cando $r^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$, co cal (ao ser $r^2 > 0$) $r = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ e, polo tanto (como $r > 0$), $r = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$, que cumpre que $0 < r < 1$, co cal é unha (e, polo tanto, a única) solución válida neste caso.

Se $r = 1$, os lados do triángulo miden todos 1, logo é un triángulo equilátero e, polo tanto, todos os seus ángulos son iguais, co cal non é un triángulo rectángulo.

Se $r > 1$, entón $1 < r < r^2$ e, polo tanto, o lado maior do triángulo mide r^2. Polo teorema de Pitágoras e o seu recíproco, o triángulo será rectángulo se e só se $\left(r^2\right)^2 = r^2 + 1^2$, ou equivalentemente, só e cando $r^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$, co cal (ao ser $r^2 > 0$) $r = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e, polo tanto (como $r > 0$), $r = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$, que cumpre que $r > 1$, co cal é unha (e, polo tanto, a única) solución válida nestoutro caso.

As solucións son, entón, $r = \sqrt{1/\varphi}$ e $r = \sqrt{\varphi}$, onde $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro.