Problemas para os máis novos 54.

5. Encontrar todos os valores positivos de a e b que verifican a ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2009$.

Solución e nota enviadas por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

En xeral, se c é un número real positivo,

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c} \Rightarrow x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c} \Rightarrow x=\left(\sqrt{x}\right)^2 \leq \left(\sqrt{c}\right)^2=c$.

Por simetría, tamén temos que $0 \leq y \leq c$. Así, $(x,y)\in[0,c]^2$. Ademais,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c} \Rightarrow x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{c}\right)^2=c \Rightarrow 2\sqrt{xy}=c-x-y$$

$$\Rightarrow 4xy=\left(2\sqrt{xy}\right)^2=(c-x-y)^2=c^2+x^2+y^2-2cx-2cy+2xy$$

$\Rightarrow 0=x^2+y^2-2xy-2cx-2cy+c^2=\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow (x,y)$ varía nun anaco dunha cónica, cuxas matriz M e submatriz A de termos cuadráticos teñen determinantes $|M|=\begin{vmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{vmatrix}=-4c^2\neq 0$ e $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$, respectivamente, co cal dita cónica é unha parábola. Ademais, o parámetro de dita parábola é $\sqrt{-\dfrac{|M|}{(\mathrm{tr}A)^3}}=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ e o seu eixo de simetría é a recta $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$, ou sexa, a bisectriz do primeiro e terceiro cuadrantes.

As tanxentes nos extremos $(0,c)$ e $(c,0)$ do arco da parábola son, respectivamente, as polares de ditos puntos respecto a tal cónica, cuxas ecuacións respectivas son

$\begin{pmatrix}1 & 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$ e $\begin{pmatrix}1 & c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$, que veñen a ser os eixes de ordenadas e de absicas, respectivamente. Esas dúas tanxentes córtanse na orixe $(0,0)$.

A gráfica da curva de ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ é entón a do arco de parábola antes estudado contido no cadrado $[0,c]^2$. Polo tanto, no caso particular $c=2009^2$, os pares de números reais positivos (a,b) tales que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009^2}$ son os infinitos pares de coordenadas dos puntos situados sobre tal arco de parábola.

Nota: Parece razoable supor que o enunciado proposto na Olimpíada de Chile 2009, Nivel Menor, foi: Encontrar todos os valores enteiros positivos de a e b que verifican a ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2009$, ou, seguramente (para evitar a aparición de excesiva cantidade de solucións), a ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$. Neste último caso, as solucións son

$(a,b)\in\{(41,1476),(164,1025),(369,656),(656,369),(1025,164),(1476,41)\}$.

A verificación de tal suposición, a proba de que esas son todas as solucións positivas da ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$, e resolucións dos outros dous problemas 3 e 4 propostos na sección *Problemas para os máis novos* do número 54 da Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, poden consultarse en:

http://www.olimpiadadematematica.cl/images/Pruebas/Final2009.pdf.