Problemas de nivel medio e de olimpíadas 54.

2. Determine todos os enteiros positivos m e n tales que $m^2+161=3^n$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Se $n\in\{0,1\}$, $161<m^2+161=3^n\le 3$, que é unha contradición. Supoñamos entón que $n\ge 2$.

Se n é par, $n=2k$ para algún enteiro estritamente positivo k, logo $161=3^n-m^2=\left(3^k\right)^2-m^2=\left(3^k+m\right)\left(3^k-m\right)$, co cal 3^k+m e 3^k-m son divisores de $161=7\cdot 23$; como 161 e 3^k+m son estritamente positivos e $161=\left(3^k+m\right)\left(3^k-m\right)$, 3^k-m tamén o é. Así, $3^k\pm m\in\{1,7,23,161\}$; como $3^k-m\le 3^k+m$, resulta:
$\left(3^k-m,3^k+m\right)\in\left\{(1,1),(1,7),(1,23),(1,161),(7,7),(7,23),(7,161),(23,23),(23,161),(161,161)\right\}$.
A única destas dez posibilidades que dá lugar a un valor enteiro positivo de n é a $\left(3^k-m,3^k+m\right)=(1,161)$, de onde $2m=3^k+m-\left(3^k-m\right)=161-1=160$ e, por tanto, $(m,n)=(80,8)$, que ademais é unha solución válida.

Se n é impar, $n=2l+1$ para algún enteiro estritamente positivo l, logo $m^2=3^{2l}\cdot 3-161$ é par por ser diferenza de impares, co cal $m=2p$ para algún enteiro estritamente positivo. Ademais,
$3^{2l+1}+1=(3+1)\left(3^{2l}-3^{2l-1}+3^{2l-2}-\ldots+3^2-3+1\right)\equiv 0\ (\text{mód } 4)$
$\Rightarrow 3^{2l+1}\equiv -1\ (\text{mód } 4)\Rightarrow m^2=3^{2l+1}-161\equiv -1-161\equiv 2\ (\text{mód } 4)$, pero por outra banda $m^2=4p^2\equiv 0\ (\text{mód } 4)$, co cal teriamos que $2\equiv 0\ (\text{mód } 4)$, o cal é unha contradición.

Polo tanto, os únicos enteiros positivos m e n tales que $m^2+161=3^n$ son $m=80$ e $n=8$.