Problemas de nivel medio e de olimpíadas 54.

3. Un trapecio $ABCD$, con lados paralelos AB e CD, está inscrito nunha circunferencia de raio 25. Sábese que CD é un diámetro e a altura dese trapecio é 24. Sexa E un punto no arco menor determinado por A e B e sexan F e G os puntos de intersección de ED e EC con AB, respectivamente. Calcule $\dfrac{AF\cdot BG}{FG}$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan O o centro da circunferencia dada e consideremos o sistema de referencia cartesiano rectangular positivamente orientado de orixe O e base ortonormal de primeiro vector $\dfrac{1}{25}\cdot\overrightarrow{OC}$. Temos entón as seguintes coordenadas en dita referencia: $O(0,0)$, $C(25,0)$ e $D(-25,0)$.

Se H e I son a proxección de B sobre CD e o punto medio do arco menor determinado por A e B, respectivamente, aplicando o teorema de Pitágoras no triángulo rectángulo OBH, resulta $OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{25^2-24^2}=7$, logo $B(7,24)$ e, pola simetría do trapezio $ABCD$ con respecto a AI, $A(-7,24)$.

Como E pertence á circunferencia de centro $O(0,0)$ e raio 25, se denotamos $\alpha=\measuredangle COE$, temos que $E(25\cos\alpha,25\operatorname{sen}\alpha)$, onde $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{24}{25}\right)<\alpha<\pi-\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{24}{25}\right)$.

As coordenadas de F poden obterse tendo en conta que é o punto de corte das rectas $ED:(25\cos\alpha+25)(y-0)=(25\operatorname{sen}\alpha-0)(x+25)$ e $AB: y=24$, resultando $F\left(\dfrac{24\cos\alpha-25\operatorname{sen}\alpha+24}{\operatorname{sen}\alpha},24\right)$ e analogamente $G\left(\dfrac{24\cos\alpha+25\operatorname{sen}\alpha-24}{\operatorname{sen}\alpha},24\right)$.

Entón $AF=\sqrt{\left(\dfrac{24\cos\alpha-25\operatorname{sen}\alpha+24}{\operatorname{sen}\alpha}+7\right)^2+(24-24)^2}=\left|\dfrac{24\cos\alpha-18\operatorname{sen}\alpha+24}{\operatorname{sen}\alpha}\right|$

e, de xeito similar, $BG=\left|\dfrac{24\cos\alpha+18\operatorname{sen}\alpha-24}{\operatorname{sen}\alpha}\right|$ e $FG=\left|\dfrac{50\operatorname{sen}\alpha-48}{\operatorname{sen}\alpha}\right|$, co cal

$$\frac{AF\cdot BG}{FG}=\left|\frac{\dfrac{24\cos\alpha-18\operatorname{sen}\alpha+24}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\dfrac{24\cos\alpha+18\operatorname{sen}\alpha-24}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{50\operatorname{sen}\alpha-48}{\operatorname{sen}\alpha}}\right|=\left|\frac{(24\cos\alpha)^2-(18\operatorname{sen}\alpha-24)^2}{(50\operatorname{sen}\alpha-48)\operatorname{sen}\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{24^2\left(\cos^2\alpha-1\right)-18^2\operatorname{sen}^2\alpha+864\operatorname{sen}\alpha}{(50\operatorname{sen}\alpha-48)\operatorname{sen}\alpha}\right|=\left|\frac{-900\operatorname{sen}\alpha+864}{50\operatorname{sen}\alpha-48}\right|=\left|\frac{900\operatorname{sen}\alpha-864}{50\operatorname{sen}\alpha-48}\right|=18.$$