Problemas propuestos en la 5^a Olimpiada Matemática Europea Femenina, abril 2016, Busteni (Rumania)

Problema 1 (propuesto por Holanda)

Sean: *n un entero positivo impar, y* $x_1, ..., x_n$ números reales no negativos. Demostrar que

$$\min_{i=1,\ldots,n}\left\{x_i^2 + x_{i+1}^2\right\} \leq \max_{j=1,\ldots,n}\left\{2x_jx_{j+1}\right\}.$$

donde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2 (propuesto por Bielorrusia)

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico, y X la intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y, la recta MY corta a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamamos respectivamente E y F. Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 3 (propuesto por Mexico)

Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están *relacionadas* si están ya sea en la misma fila o en la misma columna. Ninguna casilla está *relacionada* con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul, de tal manera que cada casilla está relacionada con, al menos, dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Problema 4 (propuesto por Luxemburgo)

Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos, X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω, tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se cortan en un punto que pertenece a ω.

Problema 5 (propuesto por Holanda)

Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k-1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ ó $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para n y k en las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

Problema 6 (propuesto por Holanda)

Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\left\{n^2+1, n^2+2, ..., n^2+2n\right\}$.

Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+5$ y $7m+6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m+3$ y $7m+4$, siendo m un entero.