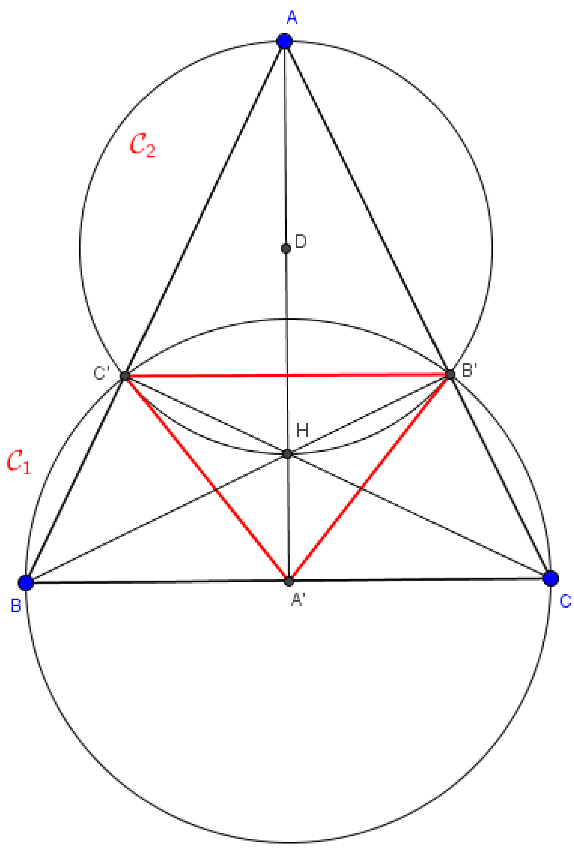
Problema 271 Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.
Sean ABC un triángulo isósceles, con AB = AC; H su ortocentro y A’B’C’ su triángulo órtico.
Demostrar que H es el inverso de A respecto de la circunferencia de diámetro BC.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).
Sea $\mathcal{C}_1$ la circunferencia de diámetro BC.
A la vista de la construcción realizada, podemos reseñar los siguientes hechos de interés:



1.- Los puntos $B', C', H\ y\ A$ son concíclicos.
Sea D el centro de esta circunferencia $\mathcal{C}_2$.
Por tanto, $\measuredangle C'DB' = 2A$.

2.- En el triángulo órtico A’B’C’, el ángulo en A’ es el doble del ángulo $\measuredangle B'BC' = 90º - A \rightarrow \measuredangle B'A'C' = 180º - 2A$.

3.- Por tanto, el cuadrilátero $A'B'D\ C'$ es también concíclico ya que $\measuredangle C'DB' + \measuredangle B'A'C' = 180º$.
Entonces, también sucederá que los otros dos ángulos opuestos, $\measuredangle A'B'D + \measuredangle A'C'D = 180º$ y, por la simetría del triángulo isósceles, como han de ser iguales ambos ángulos, resultará que $\measuredangle A'B'D = \measuredangle A'C'D = 90º$.

4.- Entonces, ambas circunferencias $\mathcal{C}_1\ y\ \mathcal{C}_2$ son **ortogonales**.
Por tanto, $\mathcal{C}_2$ será invariante respecto de la inversión de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.
De este modo, H es el punto inverso de A respecto de la circunferencia $\mathcal{C}_1$, por tratarse de dos puntos de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, alineados con el punto A’, centro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.