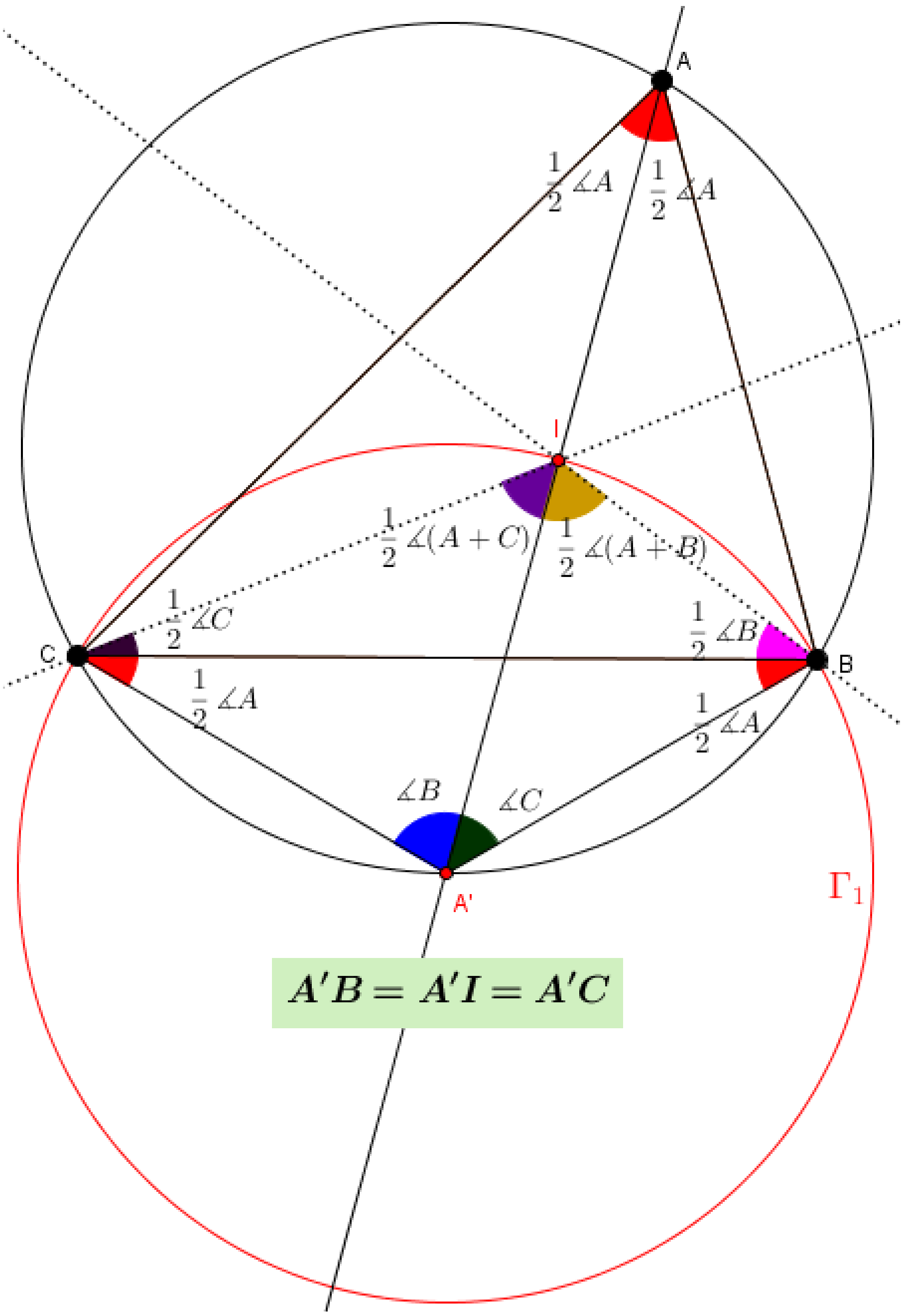
Problema 274, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, León, España.
En el triángulo ABC, con incentro I, la recta AI corta a BC en D, y E es el punto medio de AD. Las circunferencias circunscritas de ABD y BCI se cortan en otro punto F, distinto de B. Probar que $\angle ABE = \angle FBC$.

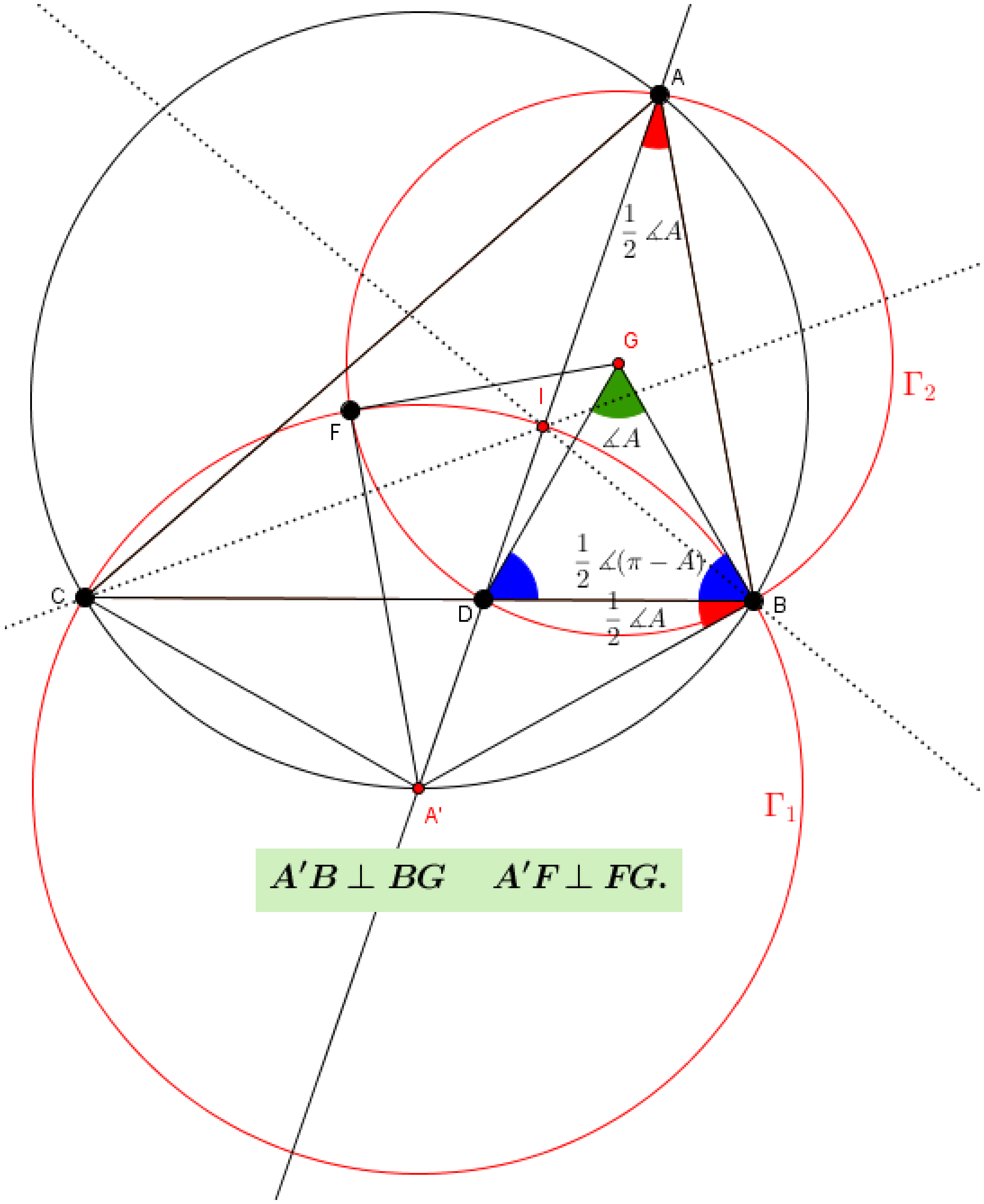
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Sea Γ_1, la circunferencia circunscrita al triángulo BCI. Esta circunferencia tiene como centro, el punto A', punto intersección de la bisectriz AI con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.



Sea Γ_2, la circunferencia de centro G, circunscrita al triángulo ABD. Ambas circunferencias construidas son ortogonales entre sí, ya que $\angle CBA' = \frac{1}{2}\angle A \;\; y \;\; \angle CBG = \frac{1}{2}\angle(\pi - A) \rightarrow A'B \perp BG.$

Del mismo modo, $A'F \perp FG.$ Por tanto, el cuadrilátero A'BGF es inscriptible. Y también lo será el cuadrilátero A'BGE, siendo E el punto medio de AK, ya que EG es la mediatriz del segmento AD. $AD \perp EG.$

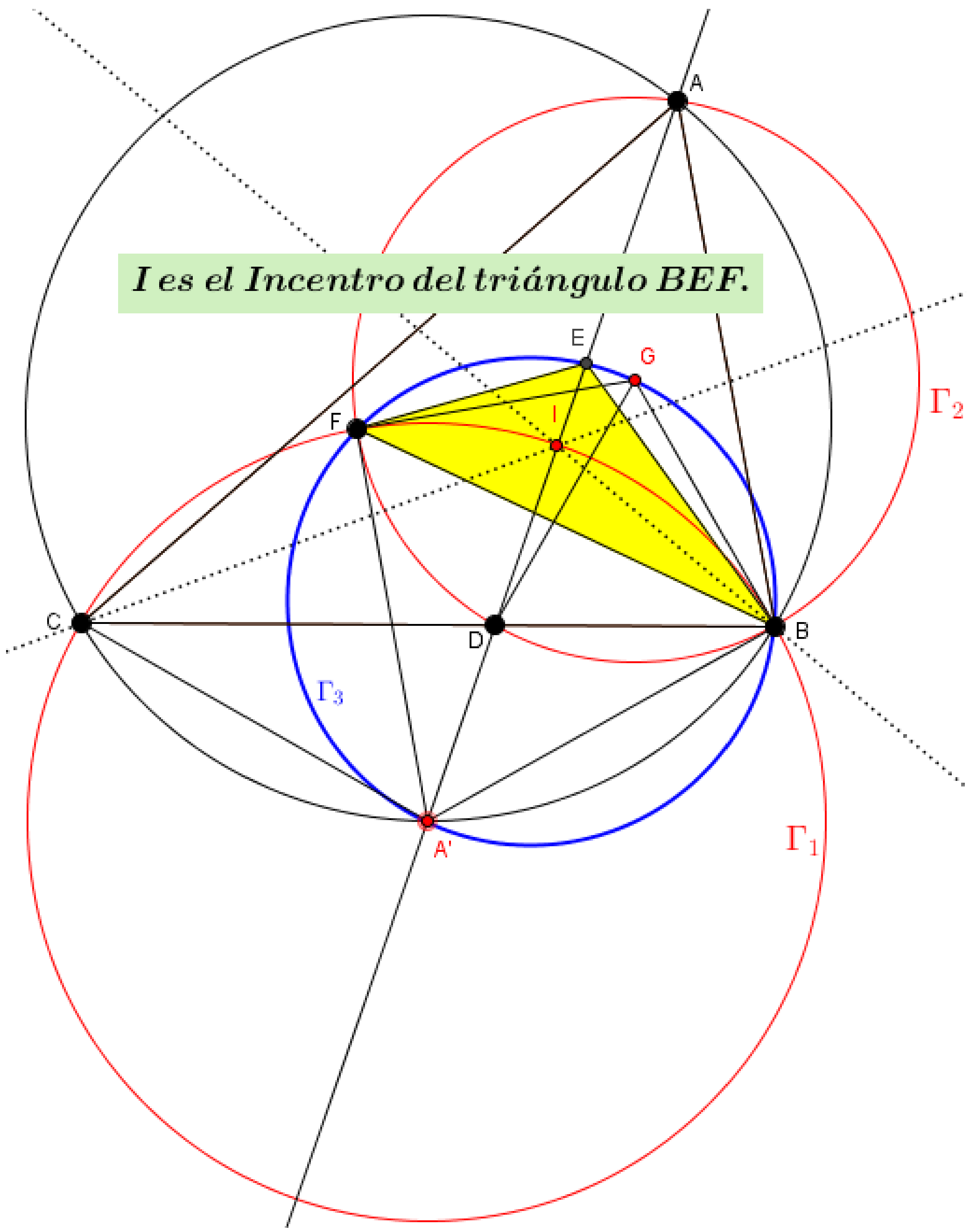


Sea Γ_3, la circunferencia que circunscribe a la figura determinada por los puntos A'BGEF.
Vamos a probar que el punto I (incentro del triángulo ABC) es también el incentro del triángulo BEF.
Para ello, observamos que $\angle FEI = \angle FEA' = \angle A'EB = \angle BEI$, ya que ambos ángulos inscritos en la circunferencia Γ_3, abarcan una misma cuerda $A'F = A'B$.
Por otro lado,

$$\angle EFB = \angle EA'B = \angle AA'B = \angle C$$

$$\angle IFB = \angle ICB = \frac{1}{2}\angle C$$

En definitiva, hemos probado que las bisectrices de dos de los ángulos del triángulo BEF,
$\angle FEB$ y $\angle EFB$
pasan por el punto I.
Por tanto, la tercera bisectriz, la del ángulo $\angle EBF$ también pasará por el punto I.



Una vez que ya hemos probado que I, incentro del triángulo ABC, es también el incentro del triángulo BEF, queda claro que $\angle ABE = \angle FBC$.