Problemas 276-80

Problema 276, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

i) Se considera la función afín f, determinada por los puntos M(0,4) y N(2,k). Si x_A es la abscisa del punto de intersección de la gráfica de f con el eje Ox, hallar k de manera que f sea una función de densidad de una variable aleatoria x, en el intervalo $[0, x_A]$.

ii) Calcular la probabilidad $p = P\left(\left(x \geq \frac{1}{8}\right) / \left(|x| < \frac{1}{4}\right)\right)$.

iii) Colocar en orden creciente: p, la probabilidad de obtener la suma 8 cuando lanzamos dos dados, y la probabilidad de que 2 libros estén en el primer estante, si colocamos 3 libros en tres estantes.

Problema 277, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, Rumania.

Demostrar que, en cualquier triángulo ABC, se verifica la siguiente desigualdad:

$$(ab+bc+ca)^2 + 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 16\sqrt{3} \cdot s^3 \cdot r$$

donde a,b,c son los lados, s es el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Problema 278, propuesto por Roberto Bosch Cabrera, Miami, Estados Unidos.

Resolver, en el conjunto de los números reales positivos, la ecuación

$$\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 = 0 .$$

Problema 279, propuesto por el editor.

Sea n un número entero positivo y a,b números reales positivos. Calcular la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(a+bx^2\right)^n} .$$

Problema 280, propuesto por el editor.

Sea ABCD un cuadrilátero convexo, M el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC y N el punto del segmento MD tal que $\frac{MN}{ND} = \frac{1}{3}$.

Los puntos E y F se eligen en las rectas AN y CN, respectivamente, de tal manera que ME es paralela a AD y MF paralela a CD. Demostrar que las rectas AF, CE y BD son concurrentes. *Observación: el problema no es nuevo. Se citará su procedencia cuando se publique la solución.*