Problema 272

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España. Dedicado a la memoria de José María Pedret.

Sean dos puntos A y B y una recta r. Para cada punto M de r sea P la intersección de la recta AM y la recta perpendicular a BM por B.

1) Demostrar que el lugar geométrico de P al variar M sobre r es, en general, una cónica.

2) Dados los puntos A y B, hallar las rectas r para las que la cónica es una parábola.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a definir una correspondencia homográfica entre las rectas que pasan por B y las que pasan por A del siguiente modo: a una recta b del haz B^* (de las que pasan por B), le asocio primero la perpendicular b' por B, que corta en M a la recta r y finalmente la recta $a = AM$ del haz A^*. (De forma más general, puede sustituirse b' por la homóloga de b en cualquier involución de rectas de centro B. Obsérvese también que los papeles de a y a', b y b', M y M' son intercambiables).

El lugar geométrico descrito en el problema es el mismo que el definido por la intersección de los pares (a, b) de rectas homólogas en la proyectividad anterior, y ese lugar geométrico es una cónica que pasa por A y por B (es otra forma de definir una cónica proyectivamente).

Esta cónica tendrá puntos en el infinito cuando las rectas $b = BP$ y $a = AM$ sean paralelas. Como $BP \perp BM$, eso sucederá cuando también sean perpendiculares AM y BM, para lo cual solamente se precisa que M esté sobre la circunferencia de diámetro AB.

Así pues, cuando la recta r corte a esta circunferencia en dos puntos el lugar geométrico es una hipérbola, si corta en uno, es decir, **si r es tangente, es una parábola** y es una elipse cuando es exterior.■