***Problema*** **274**

*En el triángulo $ABC$, con incentro $I$, la recta $AI$ corta a $BC$ en $D$ y $E$ es el punto medio de $AD$. Las circunferencias circunscritas de $ABD$ y $BCI$ se cortan en otro punto $F$, distinto de $B$. Probar que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC$.*

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**

Utilizando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $ABC$, tenemos para el incentro $I = (a{:}b{:}c)$ y por tanto $D = (0{:}b{:}c)$ y para el punto medio de $AD$, $E = (b + c{:}b{:}c)$.

La ecuación de una circunferencia en estas coordenadas es de la forma

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(px + qy + rz) = 0$$

donde $\Gamma(x, y, z) = 0$ es la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $ABC$, es decir:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

Con esto se tienen para las circunferencias del problema las siguientes ecuaciones:

$(ABD)$:

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)\frac{a^2b}{b + c}z = 0$$

$(BCI)$:

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)bcx = 0$$

Para la resolución del problema no es necesario hallar el punto $F$ de intersección de estas dos, es suficiente probar que el conjugado ortogonal de $E$ está sobre el eje radical de estas circunferencias. Un cálculo sencillo nos da para este eje radical la ecuación:

$(EJE)$:

$$(b + c)cx - a^2z = 0.$$

El conjugado ortogonal de un punto arbitrario $X = (x{:}y{:}z)$ es el punto $X^*$ de coordenadas $X^* = \left(\frac{a^2}{x}{:}\frac{b^2}{y}{:}\frac{c^2}{z}\right)$, por tanto, $E^* = \left(\frac{a^2}{b+c}{:}\frac{b^2}{b}{:}\frac{c^2}{c}\right) = (a^2{:}b(b + c){:}c(b + c))$. Resulta inmediato comprobar que $E^*$pertenece al eje radical. ■