Distancia de un punto del espacio a un punto en el plano de un triángulo

Constanti Rusu[1]

RESUMEN. En este artículo damos fórmulas para la distancia de un punto M del espacio $\mathbf{S}$ al punto K del interior del triángulo ABC. También calculamos esa distancia en los casos $K \in (ABC)$ y $K \notin Int[ABC]$.

I. Introducción

Utilizaremos las notaciones habituales para el triángulo.
Sea ABC el triángulo, y los puntos $M \in S$, $K \in Int(\Delta ABC)$. La recta AK interseca al lado BC en el punto A'.

Llamamos:

$$p_K = \frac{AK}{KA'}, q_K = \frac{BA'}{A'C}, \alpha_K = \frac{1}{1+p_K}, \beta_K = \frac{p_K}{(1+p_K)(1+q_K)}, \gamma_K = \frac{p_K q_K}{(1+p_K)(1+q_K)}.$$

Observemos que $\alpha_K + \beta_K + \gamma_K = 1$.

Observemos también que el punto K está bien definido por los números positivos p_k y q_k.

Vamos a deducir los valores de $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ para varios puntos notables del triángulo ABC. En general usaremos el teorema de *Van Aubel* para calcular p_k.

Para el baricentro deducimos inmediatamente

$$p_G = 2,\ q_G = 1, \alpha_G = \beta_G = \gamma_G = \frac{1}{3}.$$

Para el incentro I tenemos, por el teorema de la bisectriz: $q_I = \frac{c}{b}$, que aplicado de nuevo al triángulo $\Delta BAA'$, da ::

$$p_I = \frac{AI}{IA'} = \frac{c}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Por el teorema de *Van Aubel* se tiene

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}, \alpha_I = \frac{a}{a+b+c}, \beta_I = \frac{b}{a+b+c}, \gamma_I = \frac{c}{a+b+c}.$$

Para el ortocentro H se obtiene:

$$p_H = \frac{AH}{HA'} = \frac{\frac{c\cos A}{\sin C}}{c \sin C \cos B ctg C} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C};$$

[1] Received:
2010 *Mathematics Subject Classification*. 51M16, 26D15
Key words and phrases. Triangle identities and inequalities.

$$q_H = \frac{BA'}{A'C} = \frac{c\cos B}{b\cos c} = \frac{\sin C\cos B}{\sin B\cos C} = ctgBtgC\,;$$
$$\alpha_H = \frac{1}{1+p_H} = \frac{\cos B\cos C}{\cos A+\cos B\cos C} = \frac{1}{tgBtgC};$$
$$\beta_H = \frac{1}{tgCtgA}\,;\gamma_H = \frac{1}{tgAtgB}\,.$$
Para el circuncentro O mediante el teorema de los senos en ΔAA_1C y ΔABA_1:
$$\frac{A_1C}{\sin\angle A_1AC} = \frac{AC}{\sin\angle AA_1C} \Rightarrow A_1C = \frac{b\cos B}{\cos(B-C)}\,;$$
$$\frac{A_1B}{\sin\angle BAA'} = \frac{AB}{\sin\angle AA_1B} \Rightarrow A_1B = \frac{c\cos C}{\cos(B-C)}\,.$$
Por lo tanto
$$q_O = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c\cos C}{b\cos B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}\,.$$
Y nuevamente con el teorema de *Van Aubel* obtenemos:
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}.$$
Entonces
$$p_O = \frac{\sin 2B}{\sin 2A} + \frac{\sin 2C}{\sin 2A} = \frac{2\sin(B+C)\cos(B-C)}{\sin 2A} = \frac{\cos(B-C)}{\cos A}\,.$$
Luego
$$\alpha_O = \frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\,;\beta_O = \frac{\cos B}{2\sin C\sin A}\,;\gamma_O = \frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\,.$$
Para el punto simediano L (punto de *Emile Lemoine*, 1840-1908) mediante el teorema de *Jakob Steiner* (1796-1819) deducimos que

$q_L = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2}$, y nuevamente por el teorema de *Van Aubel* resulta

$p_L = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2}$, donde A_1, B_1, C_1 son los pies de las simedianas desde los vértices A, B, C del triángulo.

Con los valores anteriores de p_L y q_L se obtiene
$$\alpha_L = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\,,\beta_L = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\,,\gamma_L = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$
Para el punto Γ de *Joseph Diaz Gergonne* (1771-1859) resulta:

$q_\Gamma = \frac{p-b}{p-c}$ □i $p_\Gamma = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-a}{p-c} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$, so:
$$\alpha_\Gamma = \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\,,\beta_\Gamma = \frac{(p-c)(p-a)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\,,$$

$$\gamma_\Gamma = \frac{(p-a)(p-b)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}.$$

Para el punto N de *Christian Heinrich Von Nagel* (1803-1882) es:

$$\alpha_N = \frac{p-a}{p},\ \beta_N = \frac{p-b}{p},\gamma_N = \frac{p-c}{p}.$$

Demostración. Sean A_2, B_2, C_2 los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados BC, CA, AB del triángulo ABC. Si tenemos en cuanta que $BA_1 = A_2C$ se tendrá :

$$q_N = \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{a-(p-b)}{p-b} = \frac{p-c}{p-b},\ p_N = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-b}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

Por lo tanto:

$$\alpha_N = \frac{1}{1+p_N} = \frac{1}{1+\dfrac{a}{p-a}} = \frac{p-a}{p},$$ y análogamente se obtienen los valores de β_N y γ_N.

II. Los vectores de posición

Lema 1. Sea el triángulo ABC. Para el punto $M \in \mathbf{S}$ y para cualquier punto $K \in [ABC]-\{A\}$ tenemos:

$$\overrightarrow{MK} = \alpha_K \overrightarrow{MA} + \beta_k \overrightarrow{MB} + \gamma_K \overrightarrow{MC}, \quad (1)$$

(ver [1]).

Demostración. En el triángulo MAA' tenemos

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\overrightarrow{MA} + p_K \overrightarrow{MA'}}{1+p_k}$$

y en el triángulo MBC

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{\overrightarrow{MB} + q_K \overrightarrow{MC}}{1+q_k},$$ con lo que obtenemos (1).

Si $K \in (AB)$ entonces $p_K = \dfrac{AK}{KB}$, $q_K = \dfrac{BB}{BC} = 0$ y

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{1+p_k}\overrightarrow{MA} + \frac{p_K}{(1+p_K)(1+0)}\overrightarrow{MB} + \frac{p_K \cdot 0}{(1+p_k)(1+0)}\overrightarrow{MC} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{MA} + p_K \overrightarrow{MB}}{1+p_K}.$$

Si $K = B$, entonces $p_K = \dfrac{AB}{BB}$, $q_K = \dfrac{BB}{BC} = 0$ y

$$\overrightarrow{MK} = \lim_{p_K\to\infty}\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA} + \lim_{p_K\to\infty}\frac{p_K}{(1+p_K)(1+0)}\overrightarrow{MB} + \lim_{p_K\to\infty}\frac{p_k}{1+p_k}\cdot\frac{q_k}{1+q_k}\overrightarrow{MC} =$$
$$= 0\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 0\cdot\overrightarrow{MC}.$$

Si $K \in (BC), A' = K$, $p_K = \dfrac{AK}{KK}$, $q_K = \dfrac{AK}{KC}$ y

$$\overrightarrow{MK} = \lim_{p_K\to\infty}\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA} + \lim_{p_K\to\infty}\frac{p_K}{(1+p_K)(1+q_K)}\overrightarrow{MB} + \lim_{p_K\to\infty}\frac{p_k}{1+p_k}\cdot\frac{1}{1+q_k}\overrightarrow{MC} =$$
$$= 0\cdot\overrightarrow{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}+q_k\overrightarrow{MC}}{1+q_K}.$$

Si $K = C = A'$, $p_K = \dfrac{AC}{CC}$, $q_K = \dfrac{BC}{CC}$ y tomando límites en (1) cuando $p_K \to \infty$, $q_K \to \infty$ obtenemos $\overrightarrow{MK} = 0\cdot\overrightarrow{MA} + 0\cdot\overrightarrow{MB} + 1\cdot\overrightarrow{MC}$.

Si $K \in (CA), A' = K$, $q_K = \dfrac{BC}{CC}$ y

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA} + \frac{p_K}{1+p_K}\lim_{q_K\to\infty}\frac{1}{1+q_K}\overrightarrow{MB} + \frac{p_K}{1+p_K}\lim_{q_K\to\infty}\frac{1}{1+q_k}\overrightarrow{MC} =$$
$$= \frac{\overrightarrow{MA}+p_k\overrightarrow{MC}}{1+p_K}.$$

Por tanto el lema es cierto para $K \in (AB] \cup [BC] \cup [CA)$.

Si $K \in \{G, I, H, O, L, N, \Gamma\}$ entonces (1) se convierte en:

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3},\ (1_a)$$

$$\overrightarrow{MI} = \frac{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{a+b+c},\ (1_b)$$

$$\overrightarrow{MH} = \frac{tgA\overrightarrow{MA}+tgB\overrightarrow{MB}+tgC\overrightarrow{MC}}{tgAtgBtgC},\ (1_c)$$

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\overrightarrow{MA} + \frac{\cos B}{2\sin C\sin A}\overrightarrow{MB} + \frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{MC},\ (1_d)$$

$$\overrightarrow{ML} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{MA} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{MB} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{MC},\ (1_e)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{p-a}{p}\overrightarrow{MA} + \frac{p-b}{p}\overrightarrow{MB} + \frac{p-c}{c}\overrightarrow{MC},\ (1_f)$$

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MA} + \frac{(p-c)(p-a)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MB} +$$
$$+ \frac{(p-a)(p-b)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MC},\ (1_g).$$

El lema 1 se puede extender al caso $K \notin [ABC]$ y resulta:

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{p_k}{(1+p_k)(1-q_k)}\overrightarrow{MB}+\frac{p_K(-q_K)}{(1+p_K)(1-q_K)}\overrightarrow{MC}\text{, si } K\in I\bigcup II$$
$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1-p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{-p_k}{(1-p_k)(1+q_k)}\overrightarrow{MB}+\frac{-p_K(q_K)}{(1-p_K)(1+q_K)}\overrightarrow{MC}\text{, si } K\in III\bigcup IV$$
$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1-p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{-p_k}{(1-p_k)(1-q_k)}\overrightarrow{MB}+\frac{-p_K(-q_K)}{(1-p_K)(1-q_K)}\overrightarrow{MC}\text{, si } K\in V\bigcup VI$$
donde $I=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle ACB)-[ABC]\}$,
$II=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle ABC)-[ABC]\}$,
$III=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle A')\}$, con $\angle A'$ es el ángulo opuesto al ángulo A
$IV=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle BAC)-[ABC]\}, V=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle B')\}$,
$VI=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle C')\}$.
Si en (1_c) tomamos $M=O$ obtenemos

$$\overrightarrow{OH}=\frac{tgA\overrightarrow{OA}+tgB\overrightarrow{OB}+tgC\overrightarrow{OC}}{tgAtgBtgC},\ (1_{c'})$$

La relación $(1_{c'})$ es equivalente a la de *James Joseph Sylvester* (1814-1897) es decir

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Demostración. Sea C' el simétrico de C con respecto a O.
Descomponemos el vector $\overrightarrow{OC'}$ según las direcciones de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.
Se tiene $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\left\|\overrightarrow{OA'}\right\|\cdot\vec{u}+\left\|\overrightarrow{OB'}\right\|\cdot\vec{v}$ ($\vec{u}$ and $\vec{v}$ son los vectores unitarios de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente). Por el teorema de los senos en $\Delta OC'A'$ y $\Delta OB'C'$ obtenemos:

$\left\|\overrightarrow{OA'}\right\|=\frac{R\sin 2A}{\sin 2C}$, $\left\|\overrightarrow{OB'}\right\|=\frac{R\sin 2B}{\sin 2C}$. Ya que $\overrightarrow{OA}=\|OA\|\cdot\vec{u}\Rightarrow\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OA}}{R}$, y $\vec{v}=\frac{\overrightarrow{OB}}{R}$.
deducimos

$$\overrightarrow{OC'}=-\overrightarrow{OC}=\frac{R\sin 2A}{\sin 2C}\cdot\frac{1}{R}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{R\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\frac{1}{R}\cdot\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\frac{\sin 2A}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OB},\ \text{(a)}$$

Probaremos que:

$$\frac{tgA\overrightarrow{OA}+tgB\overrightarrow{OB}+tgC\overrightarrow{OC}}{tgAtgBtgC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$
$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{tgC}{tgA+tgB+tgC}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\frac{tgA}{tgA+tgB+tgC}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA}+\left(\frac{tgB}{tgA+tgB+tgC}-1\right)\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{tgA+tgB}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{tgB+tgC}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{tgC+tgA}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sin C}{\cos A\cos B}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sin A}{\cos B\cos C}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{\sin B}{\cos C\cos A}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\frac{\sin 2A}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OA} - \frac{\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OB}$$, q.e.d.

Mediante $\dfrac{tgA\overrightarrow{OA} + tgB\overrightarrow{OB} + tgC\overrightarrow{OC}}{tgAtgBtgC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ obtenemos

$$OH^2 = [3 + 2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)]\cdot R^2 =$$

$$= \frac{tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C + 2tgAtgB\cos 2C + 2tgBtgC\cos 2A + 2tgCtgA\cos 2B}{tg^2 Atg^2 Btg^2 C}.$$

Observaciones.

(1_{c_1}) ΔABC equilátero $\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -\dfrac{3}{2}$

(1_{c_2}) ΔABC equilátero $\Leftrightarrow \sum tg^2 A + 2\sum tgAtgB\cos 2C = 0$.

Usamos que $\overrightarrow{OH}^2 = 0 \Leftrightarrow O = H$.

III. Cálculos de las distancias

Teorema. Si $M \in \mathbf{S}$ y $K \in [ABC] - \{A\}$ se tiene:

$$MK = \sqrt{\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2}, \quad (2)$$

Demostración. Por (1) y el teorema del coseno en MAB, MBC, MCA resulta

$$MK^2 = \alpha_K^2 MA^2 + \beta_K^2 MB^2 + \gamma_K^2 MC^2 + 2\alpha_K\beta_K \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + 2\beta_K\gamma_K \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} +$$
$$+ 2\gamma_K\alpha_K \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = \alpha_K^2 MA^2 + \beta_K^2 MB^2 + \gamma_K^2 MC^2 + 2\alpha_K\beta_K MA\cdot MB\cdot\cos\angle AMB +$$
$$+ 2\beta_K\gamma_K MB\cdot MC\cdot\cos\angle BMC + 2\gamma_K\alpha_K MC\cdot MA\cdot\cos\angle CMA$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = \alpha_K^2 MA^2 + \beta_K^2 MB^2 + \gamma_K^2 MC^2 + 2\alpha_K\beta_K MA\cdot MB\cdot\frac{MA^2 + MB^2 - MC^2}{2MA\cdot MB} +$$
$$+ 2\beta_K\gamma_K MB\cdot MC\cdot\frac{MB^2 + MC^2 - MA^2}{2MB\cdot MC} + 2\gamma_K\alpha_K MB\cdot MC\cdot\frac{MC^2 + MA^2 - MB^2}{2MC\cdot MA}$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = (\alpha_K + \beta_K + \gamma_K)(\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2)$$

$$\Leftrightarrow MK = \sqrt{\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2}$$, q.e.d.

Aplicaciones.

1. Tenemos

$$K = A', p_{A'} = \frac{AA'}{A'A'}, q_{A'} = 1, \alpha_{A'} = \lim_{p_{A'}\to\infty}\frac{1}{1+p_{A'}} = 0, \beta_{A'} = \lim_{p_{A'}\to\infty}\frac{p_{A'}}{1+p_{A'}}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$\gamma_{A'} = \lim\limits_{p_{A'}\to\infty}\dfrac{p_{A'}}{1+p_{A'}}\cdot\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ y $AA' = \sqrt{\dfrac{1}{2}AB^2 + \dfrac{1}{2}AC^2 - \dfrac{1}{4}a^2}$, entonces

$$m_a = \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}}.$$

2. $K = A', p_{A'} = \dfrac{AA'}{A'A'}, q_{A'} = \dfrac{b^2}{c^2}, \alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{b^2}{b^2+c^2}, \gamma_{A'} = \dfrac{c^2}{b^2+c^2}$, y por (2) se obtene:

$$s_a = \sqrt{\frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2b^2}{b^2+c^2} - \frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}a^2} = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \Rightarrow s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2}m_a .$$

3. $\alpha_{A'} = a, \beta_{A'} = \dfrac{b}{b+c}, \gamma_{A'} = \dfrac{c}{b+c}$ y por (2) deducimos que:

$l_a = AA' = \sqrt{\dfrac{bc^2}{b+c} + \dfrac{cb^2}{c+b} - \dfrac{bc}{(b+c)^2}a^2}$, luego

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)} .$$

4. $\alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{1}{1+ctgBctgC}, \gamma_{A'} = \dfrac{1}{1+ctgBctgA}$ o bien

$\beta_{A'} = \dfrac{\sin B\cos C}{\sin A}, \gamma_{A'} = \dfrac{\cos B\cos C}{\sin A}$ y por (2) deducimos:

$$h_a = \sqrt{\frac{\sin B\cos C}{\sin A}c^2 + \frac{\cos B\cos C}{\sin A}b^2 - \frac{\sin B\cos C\sin C\cos B}{\sin^2 A}a^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin A}\sqrt{c^2\sin A\sin B\cos C + b^2\sin A\cos B\sin C - \frac{a^2}{4}\sin 2B\sin 2C} =$$

$$= \frac{2R}{\sin A}\sqrt{\frac{abc^2}{4R^2}\cos C + \frac{ab^2c}{4R^2}\cos B - \frac{a^2bc}{4R^2}\cos C\cos B} =$$

$$= \frac{\sqrt{abc}}{a}\sqrt{c^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc} + b^2\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{2acb} - a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2c^2a^2+2c^2b^2+2b^2c^2} = \frac{1}{2a}S .$$

5. Para la ceviana de Gergonne:

Se tiene $\alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{p-c}{a}, \gamma_{A'} = \dfrac{p-b}{a}$ y mediante (2) resulta:

$$g_a = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{b^2(p-b)+c^2(p-c)-(p-c)(p-b)a} .$$

6. La ceviana de Nagel.

Ahora $\alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{p-b}{a}, \gamma_{A'} = \dfrac{p-c}{a}$ y por (2) resulta:

$$\eta_a = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{c^2(p-b)+b^2(p-c)-(p-c)(p-b)a} .$$

Observaciones:

2.a. $MK \geq 0 \Rightarrow \alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 \geq \beta_K\gamma_K a^2 + \gamma_K\alpha_K b^2 + \alpha_K\beta_K c^2$.

2.b. Hay igualdad en 2.a si $M = K$.

2.c. Si $M \in Int(\Delta ABC)$, entonces $(q', p') \in R_+^* \times R_+^*$, $MK = KM \Leftrightarrow$

$$\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K \gamma_K a^2 - \gamma_K \alpha_K b^2 - \alpha_K \beta_K c^2 =$$
$$= \alpha_M KA^2 + \beta_M KB^2 + \gamma_M KC^2 - \beta_M \gamma_M a^2 - \gamma_M \alpha_M b^2 - \alpha_M \beta_M c^2 .$$

Aplicaciones.

Se considera el conjunto $\Delta = \{O, G, H, I, L, N, \Gamma\}$.
Por (2) obtenemos:

(2.1) $OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{tg^2 A tgB tgC} - \frac{b^2}{tgA tg^2 B tgC} - \frac{c^2}{tgA tgB tg^2 C}} =$

$$= \sqrt{R^2 - 4R^2\left(\frac{\cos^2 A \cos B \cos C}{\sin B \sin C} + \frac{\cos A \cos^2 B \cos C}{\sin A \sin C} + \frac{\cos A \cos B \cos^2 C}{\sin A \sin B}\right)} =$$

$$= R\sqrt{1 - 4\cos A \cos B \cos C\left(\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B}\right)} =$$

$= R\sqrt{1 - 8\cos A \cos B \cos C}$, donde usamos el que

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2 .$$

Así $OH = R\sqrt{1 - 8\cos A \cos B \cos C}$.

Observaciones.

$OH < R \Leftrightarrow \Delta ABC$ acutángulo;
$OH = R \Leftrightarrow \Delta ABC$ rectángulo ([2]);
$OH > R \Leftrightarrow \Delta ABC$ obtusángulo.

(2.2) $OG = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}} = \frac{R}{3}\sqrt{1 - 8\cos A \cos B \cos C}$.

(2.3) $HG = \frac{2R}{3}\sqrt{1 - 8\cos A \cos B \cos C}$.

Observacion.

Por (2.1), (2.2) y (2.3) tenemos: $OH = HG + OG \Rightarrow$ los puntos O, G y H están alineados.

(2.4) $OL = \sqrt{R^2 - 3 \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{2R}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2}$.

Observación.

$OL \geq 0 \Rightarrow \frac{abc\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \leq R \Leftrightarrow \frac{abc}{4S} \geq \frac{abc\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, que es la desigualdad de *Ionescu – Weitzenböck.*

(2.5) $LO = \sqrt{\frac{1}{2}\sum LA^2 \cdot \frac{\cos A}{\sin B \sin C} - \frac{1}{4}\sum \frac{a^2}{\sin^2 A} \cdot ctgB ctgC}$.

(2.6) $HO = 2R \cdot \sqrt{\sum \frac{\cos^3 A}{2\sin B \sin C} - \frac{1}{4}\sum ctgB ctgC}$.

(2.7) $GO=\sqrt{\frac{2}{9}\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}-\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}\sum\frac{\cos B\cos C}{\sin A}\cdot a^2}$.

(2.8) $GH=\sqrt{\frac{4}{9}\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}-\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}}$.

Por (2.a) obtenemos:

$OH\geq 0\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C\leq\frac{1}{8}$;

$HO\geq 0\Leftrightarrow\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}\geq\frac{1}{4}\sum ctgBctgC\Leftrightarrow\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}\geq\frac{1}{4}$;

$GO\geq 0\Leftrightarrow\frac{2}{9}\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}\geq\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}\sum a^2\cdot\frac{\cos B\cos C}{\sin A}$

$GH\geq 0\Leftrightarrow\frac{4}{9}\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}\geq\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}$.

Mediante (2.b) obtenemos:

$OH=0\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

$HO=0\Leftrightarrow\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

$GO=0\Leftrightarrow\frac{2}{9}\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}=\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}\sum a^2\cdot\frac{\cos B\cos C}{\sin A}\Leftrightarrow\Delta ABC$ es equilátero;

$OL=0\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

$LO=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum LA^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}=\frac{1}{4}\sum ctgBctgC\cdot\frac{a^2}{\sin^2 A}\Leftrightarrow\Delta ABC$ is equilatero;

$GH=0\Leftrightarrow\frac{4}{9}\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}=\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

Mediante (2.c) obtenemos:

$HO=OH\Rightarrow 4\cos A\cos B\cos C+\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}=1$;

$GO=OG\Rightarrow 8\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}-9\sum a^2\cdot\frac{\cos B\cos C}{\sin A}=4R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$;

$$LO=OL\Rightarrow\frac{1}{2}\sum LA^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}-\frac{1}{4}\sum ctgBctgC\cdot\frac{a^2}{\sin^2 A}=$$

$$=\frac{4R^2}{(a^2+b^2+c^2)}(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2);$$

$GH=HG\Rightarrow 4\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}-9\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}=4R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$.

Hemos obtenido una propiedad del conjunto Δ :

$$\forall K, K' \in \Delta, KK' = 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ es equilátero.}$$

Sea P el primer punto de *Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard* (1845-1922).
Tenemos $m(\angle BAP) = m(\angle PBC) = m(\angle PCA) = \alpha$.
Por el teorema de los senos en ABP y CPA resulta

$$ctg\alpha = ctgA + ctgB + ctgC \text{ (ver [3]).}$$

Proposición 1. $P = H \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.
Demostración. Tenemos :

$$\frac{\pi}{2} - B = \alpha \Rightarrow ctg\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = ctg\alpha \Leftrightarrow tgB = ctgA + ctgB + ctgC, \text{ (a).}$$

Análogamente,
$tgC = ctgA + ctgB + ctgC$, (b) y $tgB = ctgA + ctgB + ctgC$, (c). De (a), (b) y (c) resulta $tgA = tgB = tgC$, i.e. ΔABC es equilátero.

Proposición 2. $P = I \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.
Demostración. $P = I \Rightarrow ctg\frac{A}{2} = ctgA + ctgB + ctgC$ and $ctg\frac{B}{2} = ctgA + ctgB + ctgC$.

$$ctg\frac{A}{2} = ctgA + ctgB + ctgC \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\cos A}{\sin A} = ctgB + ctgC$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{A}{2} - \frac{2\cos^2\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{A}{2}}\right) = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B \sin C, \text{ (a).}$$

También es $\sin^2 B = \sin C \sin A$, (b).
De (a) y (b) resulta:

$$\frac{\sin^4 B}{\sin^2 C} = \sin B \sin C \Leftrightarrow \sin^3 B = \sin^3 C \Rightarrow \sin B = \sin C \Rightarrow B = (-1)^k C + k\pi, k \in Z .$$

Si $k = 0$ se tiene $B = C$. Tomamos $A = \pi - 2B$ y resulta:

$$\sin^2 2B = \sin^2 B \Leftrightarrow (\sin 2B - \sin B)(\sin 2B + \sin B) = 0 \Leftrightarrow \sin 2B = \sin B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B = (-1)^k B + k\pi \text{, and ya que } k = 1 \text{ y } 3B = \pi \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3} = C \text{ y } \Delta ABC \text{ es equilátero.}$$

Proposición 3. $P = G \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.
Demostración. Seat ΔABC y $m(\angle BAA') = \alpha'$ (A' es el punto medio del lado BC).
Tenemos:

$$A(\Delta BAA') = \frac{cm_a \sin\alpha'}{2} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow c \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}} \cdot \sin\alpha' = \frac{bc \sin A}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha' = \frac{\sin B \sin A}{\sqrt{2(\sin^2 B + \sin^2 C) - \sin^2 A}} \text{ y}$$

$$ctg\alpha' = \frac{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B \sin^2 A}}{\sin B \sin A}.$$

$P = G \Rightarrow [AP] \subset [AA']$ y $[BP] \subset [BB']$, dondee B' es el punto medio de CA.
Entonces $\alpha = \alpha'$ y $\alpha = m(\angle CBB') = \beta$.
Por tanto $\alpha = \alpha' \Rightarrow ctg\alpha = ctg\alpha' \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B \sin^2 A}}{\sin B \sin A} = ctgA + ctgB + ctgC.$$

Llamando $ctgA = x, ctgB = y, ctgC = z$ resulta:

$$\frac{\frac{2}{1+y^2} + \frac{2}{1+z^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}} = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2x^2 + 2z^2 + 2z^2x^2 + 2 + 2y^2 + 2x^2 + 2x^2y^2 - 1 - z^2 - y^2 - y^2z^2 - 1 - z^2 =$$

$$= (1+z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + 2) \Leftrightarrow 3x^2 - 3z^2 + z^2x^2 - z^4 + 2x^2y^2 - 2z^2y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x^2 - z^2)(3 + z^2 + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = z$, i.e. $ctgA = ctgC \Rightarrow A = C$.
Si $[BP] \subset [BB']$ de forma similar obtenemos que

$$\frac{\sqrt{2\sin^2 C + 2\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C \sin^2 B}}{\sin B \sin C} = ctgA + ctgB + ctgC,$$

lo que nos dice que $C = B$, y la conclusión deriva de ahí.

Proposición 4. $P = O \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostraciónf. $P = O \Rightarrow m(\angle BAP) = m(\angle BAO) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - C \Rightarrow$

$\Rightarrow ctg\alpha = ctg\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \Leftrightarrow ctg\alpha = tgC \Leftrightarrow ctgA + ctgB + ctgC = tgC$ como en la proposición 1 se obtene el resultado deseado.

Proposición 5. $P = L \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Seat A' el pie de la simediana desde A. Ponemos $AA' = s_a$ y $m(\angle BAA') = \beta$. Por $P = L \Rightarrow m(\angle BAA') = m(\angle BAP)$ i.e. $\beta = \alpha$. Por el teorema de los senos en $\Delta BAA'$ tenemos $\frac{BA'}{\sin\beta} = \frac{s_a}{\sin B} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{BA'}{s_a}\cdot\sin B$. De

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{BA'}{a} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} \Leftrightarrow BA' = \frac{ac^2}{b^2 + c^2},$$

resulta que : $\sin\beta = \frac{c^2a^2\sin^2\beta}{4b^2m_a^2} \Rightarrow ctg^2\beta = \frac{1 - \sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{4b^2m_a^2}{c^2a^2\sin^2\beta} - 1.$

De $\beta = \alpha \Rightarrow ctg\beta = ctg\alpha \Rightarrow \frac{4b^2m_a^2}{c^2a^2\sin^2\beta} - 1 = (ctgA + ctgB + ctgC)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}{\sin^2 C \sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}.$$

Llamando $\sin A = x, \sin B = y, \sin C = z$ obtenemos:

$$\frac{2y^2+2z^2-x^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \Leftrightarrow 2y^4+2z^2y^2-x^2y^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(y^2-x^2)+z^2(y^2-x^2)=0 \Leftrightarrow (y^2-x^2)(2y^2+z^2)=0 \Leftrightarrow y=x \Rightarrow A=B.$$

Análogamente, de $P=L$, obtenemos $B=C$. Luego $B=A=C$, q.e.d.

Proposición 6. $P=\Gamma \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Aplicando el teorema de los senos en BAA' deducimos

$$\frac{BA'}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(\beta+B)} \Leftrightarrow \frac{\sin(\beta+B)}{\sin\beta} = \frac{c}{p-b} \Leftrightarrow \cos B + ctg\beta \sin B = \frac{c}{p-b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ctg\beta = \frac{c}{(p-b)\sin B} - ctgB \Leftrightarrow ctgB = \frac{2\sin C}{(\sin A - \sin B + \sin C)\sin B} - ctgB.$$

De $P=\Gamma \Rightarrow P \in (A\Gamma) \Rightarrow ctg\alpha = ctg\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A - \sin B + \sin C)\sin B} = ctgA + 2ctgB + ctgC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A - \sin B + \sin C)\sin B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A - \sin B + \sin C} = \frac{\sin^2 C + \sin^2 A}{\sin A \sin C}.$$

Poniendo: $\dfrac{\sin A}{\sin C} = x, \dfrac{\sin B}{\sin C} = y$ y entonces resulta:

$$\frac{2x}{x-y+1} = \frac{1+x^2}{1} \Leftrightarrow x-y+1 = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow x-y = \frac{-(x-1)^2}{1+x^2} \Rightarrow x \le y, \quad \text{(a)},$$

con igualdad si $x=1$.

De manera similar:

Ya que $P \in [BA'] \Rightarrow \dfrac{2y}{x+y-1} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2}$, (b) y como $P \in [CC'] \Rightarrow \dfrac{2}{-x+y+1} = \dfrac{1+y^2}{y^2}$, (c).

De (b) deducimos: $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{x+y-1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{2xy}{x^2+y^2} - 1 = \dfrac{y-1}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-y)^2}{x^2+y^2} = \frac{y-1}{x} \Rightarrow y \le 1.$$

De (c) resulta: $\dfrac{-x+y+1}{y} = \dfrac{2y}{1+y^2} \Leftrightarrow \dfrac{2y}{1+y^2} - 1 = \dfrac{-x+y+1}{y} - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-(y-1)^2}{1+y^2} = \frac{-x+1}{y} \Rightarrow -x+1 \le 0 \Rightarrow x \ge 1.$$

Entonces, $x \le y \le 1$ and $x \ge 1 \Rightarrow x = y = 1$, i.e. $\sin A = \sin B = \sin C$ y ΔABC es equilátero.

Proposición 7. $P=N \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Sean $[AA_2],[BB_2],[CC_2]$ las cevianas de Nagel del triángulo ABC.

Poniendo $\alpha_1 = m(\angle BAA_2), \alpha_2 = m(\angle B_2BC), \alpha_3 = m(\angle C_2CA)$, por el teorema de los senos en ΔABA_2 y ΔB_2BC tenemos:

$$\frac{BA_2}{\sin\alpha_1} = \frac{c}{\sin(B+\alpha_1)} \Leftrightarrow \frac{a}{p-c} = \frac{\sin(\alpha_1 + B)}{\sin\alpha_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cos B + \sin B ctg\alpha_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A + \sin B - \sin C)\sin B} = ctgB + ctg\alpha_1 .$$

Ya que: $\alpha = \alpha_1 \Rightarrow ctg\alpha = ctg\alpha_1 \Leftrightarrow ctgA + ctgB + ctgC = ctg\alpha_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A + \sin B - \sin C)\sin B} = (ctgA + ctgB) + ctgB + ctgC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A + \sin B - \sin C)\sin B} = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 C + \sin^2 A}{2\sin^2 C} = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B - \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 C + \sin^2 A}{2\sin C \sin A} = \frac{\sin C}{\sin A + \sin B - \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C \sin A}{\sin^2 C + \sin^2 A} - 1 = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin C} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(\sin A - \sin C)^2}{\sin^2 C + \sin^2 A} = \frac{\sin A + \sin B - 2\sin C}{\sin C}$$

$\Leftrightarrow \sin A + \sin B - 2\sin C \le 0 \Leftrightarrow \sin A + \sin B \le 2\sin C$, (1).

De $\alpha = \alpha_2$ y como antes, obtenemos:

$$\sin B + \sin C \le 2\sin A, (2).$$

Análogamente $\alpha = \alpha_3$ y deducimos que $\sin A + \sin C \le 2\sin B$, (3).

De (1), (2) y (3) obtenemos:

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \le 8\sin A \sin B \sin C, (a).$$

Ya que $\sin A + \sin B \ge 2\sqrt{\sin A \sin B}$, $\sin B + \sin C \ge 2\sqrt{\sin B \sin C}$, $\sin C + \sin A \ge 2\sqrt{\sin C \sin A}$, entonces

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \ge 8\sin A \sin B \sin C, (b).$$

De (a) y (b) resulta:

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = 8\sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin A(\sin B - \sin C)^2 + \sin B(\sin C - \sin A)^2 + \sin C(\sin A - \sin B)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C$, q.e.d.

References:

[1] Rusu C., *O metodă de obținere a unor inegalități*,G.M.-B nr. 1/2002, 7-10.

[2] Problema 2680, G.M.-B nr.9/2013, autor Marcel Țena.

[3] Mihăileanu N., *Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică y Pedagogică, 1965, 84-86.

[4] Tom F., *Proprietăți caracteristice triunghiului echilateral*, Recreații Matematice, Nr. 1, 2011, 17-19.

[5] Zvonaru T., Stanciu N., *Alte proprietăți caracteristice triunghiului echilateral*, Recreații Matematice, Nr. 2, 2011, 108-111.

Department of Mathematics,
"Ştefan cel Mare" High School,
Rîmnicu Sărat, Romania