Problema 273

Demostrar que si n es primo, el número $\left[\left(4+\sqrt{11}\right)^n\right]$ es un múltiplo de n más 7.

Solución

Se tiene que $0 < \left(4-\sqrt{11}\right)^n < 1,\ \forall\, n > 0$. Consideremos entonces el número

$$a(n) = \left(4+\sqrt{11}\right)^n + \left(4-\sqrt{11}\right)^n$$

Se tiene que a(n) es entero para todo n, pues al desarrollar las potencias por la fórmula del binomio, las potencias impares de $\sqrt{11}$ se cancelan. Entonces

$$\left[\left(4+\sqrt{11}\right)^n\right] = a(n) - 1$$

El enunciado es entonces equivalente a mostrar que a(n) ≡ 8 (mod n) si n es primo. Desarrollando las potencias, tenemos que para n = 2k+1, k ≥ 0

$$\boldsymbol{a(n) = 2\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} 4^{n-2i} 11^{i}}$$

Pero si n es primo, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es múltiplo de n si 0 < k < n, pues el factor primo n del numerador no se puede simplificar con ninguno del denominador. Por tanto, el único término del sumatorio que no es múltiplo de n es el correspondiente a i = 0, y

$a(n) \equiv 2 \cdot 4^n \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8\ (mod\ n)$ (Teorema de Euler-Fermat)

Esto demuestra el enunciado para todo n primo impar. Para n = 2,

$$a(2) = \left(4+\sqrt{11}\right)^2 + \left(4-\sqrt{11}\right)^2 = 2(16+11) \equiv 8 \equiv 0\ (mod\ 2)$$

El recíproco no es cierto en general, sin embargo el único contraejemplo con n < 10000 es n = 46.

Ignacio Larrosa Cañestro

(profesor de enseñanza secundaria jubilado)