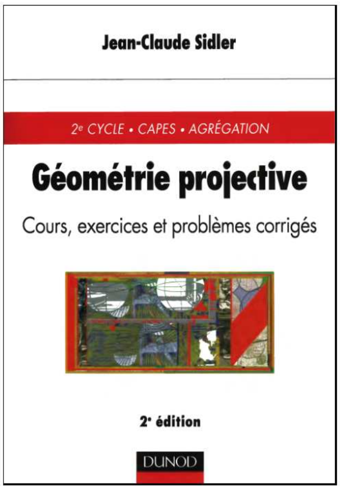
UN PROBLEMA DEL SIDLER

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN

1. Introducción

En este trabajo presentamos una solución de un bonito problema del libro *Géométrie Projective* de Jean Claude Sidler, libro apreciadísimo por mi amigo Jose María Pedret, un especialista en la materia.



Sin embargo, no usaremos geometría proyectiva sino coordenadas baricéntricas, para lo que nos ayudaremos del programa de cálculo simbólico *Mathematica* y del paquete `baricentricas.nb`[1] para trabajar con este tipo de coordenadas.

La pareja formada por *Mathematica* y las coordenadas baricéntricas se convierte así en una especie de oráculo, de manera que nuestro papel se puede centrar en hacer las preguntas adecuadas y, por supuesto, en interpretar las respuestas.

2. Enunciado

El problema que vamos a resolver es el siguiente:

5.2. *Sean Ω una circunferencia, y A, B dos puntos sobre Ω. Una recta variable que pasa por el polo T de AB corta a Ω en P y Q. Determinar P para que las rectas AP y BQ son paralelas.*

[1]Disponible en `http://garciacapitan.99on.com/baricentricas`

3. Cálculos

Introducimos un tercer punto C sobre Ω para formar un triángulo de referencia. Entonces, en coordenadas baricéntricas el polo de AB es $T = (a^2 : b^2 : -c^2)$. Si P es el conjugado isogonal del punto infinito $(1 : t : -1-t)$, entonces obtenemos el punto

$$Q = (a^2(-1+t)t : -b^2(-1+t) : c^2t).$$

La intersección de AP y BQ nos da el punto

$$M = (a^2(1-t)t : b^2(1+t) : -c^2t).$$

Al variar P sobre Ω, el punto M describe la cónica

$$c^4xy + b^2c^2xz + a^2c^2yz + 2a^2b^2z^2 = 0,$$

cuyo discriminante es $\Delta = (c^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 > 0$, por lo que la cónica es siempre una hipérbola. Lo que queremos hallar son los puntos infinitos de dicha hipérbola.

Hallando la intersección de la cónica y la recta del infinito (con ecuación $x + y + z = 0$) obtenemos que los puntos del infinito de la hipérbola son los conjugados isogonales de los puntos de intersección de Ω y la recta l de ecuación $(2b^2 - c^2)x + (2a^2 - c^2)y - c^2z = 0$.

Con el fin de encontrar una construcción sencilla de esta recta, hallamos su polo respecto de Ω, obteniendo el punto

$$S = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : -4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4).$$

Afortunadamente, encontramos que este punto cumple la relación

$$CS : SO = -\frac{c^2}{4R^2}.$$

Esto quiere decir que S es el punto medio del segmento $S'S''$ siendo S' y S'' los puntos que dividen el segmento CO en las razones

$$\frac{CS'}{S'O} = \frac{c}{2R}, \quad \frac{CS''}{S''O} = -\frac{c}{2R}.$$

En efecto, si $CS' : S'O = \lambda$ y $CS'' : S''O = -\lambda$, y S es el punto medio de $S'S''$, resulta

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (1+\lambda)S' = C + \lambda O \\ (1-\lambda)S' = C - \lambda O \end{cases} \Rightarrow & \begin{cases} (1-\lambda^2)S' = (1-\lambda)C + \lambda(1-\lambda)O \\ (1-\lambda^2)S'' = (1+\lambda)C - \lambda(1+\lambda)O \end{cases} \\
\Rightarrow & (1-\lambda^2)(S' + S'') = 2C - 2\lambda^2 O \\
\Rightarrow & (1-\lambda^2)(2S) = 2C - 2\lambda^2 O \\
\Rightarrow & (1-\lambda^2)S = C - \lambda^2 O,
\end{aligned}$$

es decir $CS : SO = -\lambda^2$.

4. Cálculos con *Mathematica*

Los cálculos y resultados descritos en la sección anterior los podemos obtener con las instrucciones:

```
<< Baricentricas`;

ptT = {a^2, b^2, -c^2};
ptP = ConjugadoIsogonal[{1, t, -1 - t}];
ptQ = SegundaInterseccionCircunferencia[ptT, {ptP, ptA, ptB}]
```

$\{a^2 (-1+t)\, t, -b^2 (-1+t), c^2\, t\}$

```
ptM = Punto[Recta[ptA, ptP], Recta[ptB, ptQ]]
```

$\{a^2 (-1+t)\, t, -b^2 (1+t), c^2\, t\}$

```
conic = Last[ConicaParametricas[ptM, t]]
```

$c^4\, x\, y + b^2 c^2\, x\, z + a^2 c^2\, y\, z + 2\, a^2 b^2 z^2$

```
rtL = Apply[Recta, Map[ConjugadoIsogonal, PuntosInfinitoConica[conic]]]
```

$\{2\, b^2 - c^2, 2\, a^2 - c^2, -c^2\}$

```
ptS = Factor[PoloConica[rtL, circunscrita]]
```

$\{a^2 (a^2 - b^2 - c^2), b^2 (-a^2 + b^2 - c^2), 4\, a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4\}$

```
ToRrp[Factor[RazonSimple[ptC, ptS, ptO]] / c^2]
```

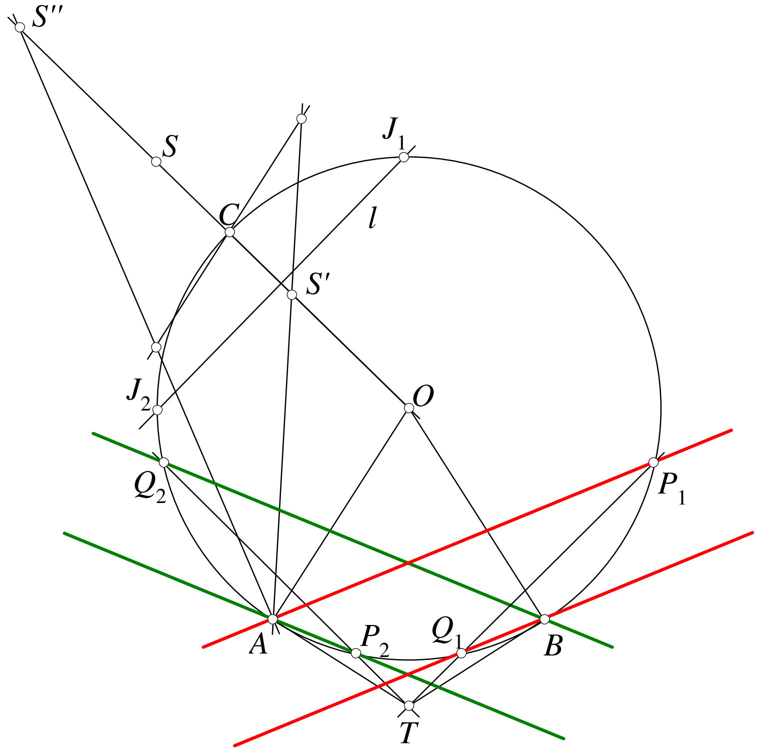
$-\frac{1}{4\, R^2}$

```
disc = DiscriminanteConica[conic]
```

$\frac{1}{4} c^4 (a^4 + 6\, a^2 b^2 + b^4 - 2\, a^2 c^2 - 2\, b^2 c^2 + c^4)$

5. Construcción

A continuación detallamos los pasos que dan las dos soluciones del problema:



1. Sea C un punto arbitrario de la circunferencia Ω.

2. Obtenemos los puntos S' y S'' que dividen el segmento CO en la razones $\pm AB/(2R)$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita a ABC.

3. S es el punto medio de S' y S''.

4. La recta l es la polar de S respecto de Ω.

5. J_1 y J_2 son los puntos de intersección de l y Ω.

6. P_1 y P_2 son los puntos de Ω tales que AP_1 y AP_2 son rectas isogonales de AJ_1 y AJ_2.

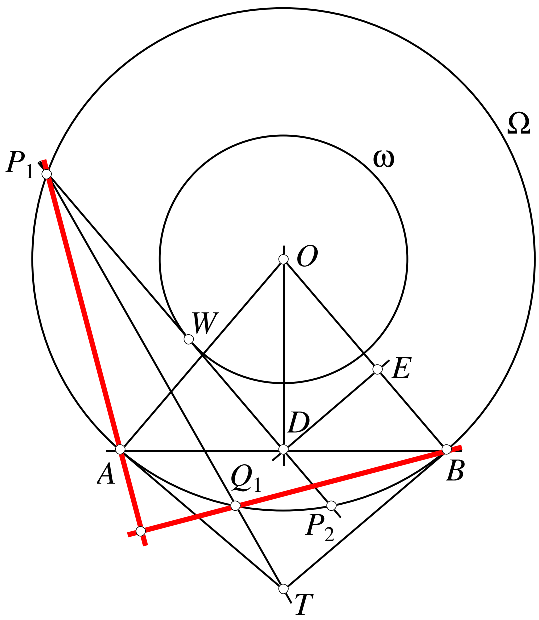
7. Q_1 y Q_2 son las segundas intersecciones con Ω de las rectas TP_1 y TP_2.

6. Perpendicularidad

Cambiamos paralelismo por perpendicularidad y obtenemos un problema que también podemos intentar resolver:

5.2a. *Sean Ω una circunferencia, y A, B dos puntos sobre Ω. Una recta variable que pasa por el polo T de AB corta a Ω en P y Q. Determinar P para que las rectas AP y BQ son perpendiculares.*

En este caso, sólo damos la solución del problema, quedando la investigación correspondiente a cargo del lector:



1. Sea D el punto medio de AB.

2. Sea E la proyección ortogonal de D sobre el radio OB.

3. Sea w la circunferencia con centro O y radio DE.

4. Trazamos una tangente a ω desde D, que corta a la circunferencia Ω en los puntos P_1 y P_2.

5. Entonces P_1 y P_2 son soluciones del problema. Así, como se muestra en la figura, si Q_1 es la segunda intersección de TP_1 y Ω, las rectas AP_1 y BQ_1 son perpendiculares.