Problema 285*(propuesto por el editor)*

Demostrar que el área de la sección de un tetraedro ABCD por un plano paralelo a AB y CD es máxima cuando ese plano biseca la mínima distancia entre AB y CD

Solución: (*propuesta por Joaquim Nadal Vidal. Llagostera, Girona)*

Vamos a resolver el problema analíticamente. Éste es un método de resolución seguro, meramente técnico, y frecuentemente poco elegante por la pesadez de los cálculos que exige.

La Geometría clásica proporciona demostraciones mucho más vistosas pero también más difíciles de encontrar. No he conseguido hallar la solución por este camino.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A(0,0,0) B(n,0,0) C(p.q.0) y D(r,s,t)

Sea π' el plano que contiene a AB y es paralelo a BD. Su ecuación es:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ r-p & s-q & t \end{vmatrix} = 0$ ===>π': -ty + (s-q) z = 0

Distancia (AB,CD) = d(CD,π') = d(C,π') = $\left|\frac{-tq}{\sqrt{t^2+(s-q)^2}}\right|$

El haz de planos paralelos a AB y CD es $\pi'': -ty+(s-q)z+e=0$

La recta AC en paramétricas es (x,y,z) = (0,0,0) + f(p,q,0) ; su intersección con π'' es F$\left(\frac{pe}{tq},\frac{qe}{tq},0\right)$

La recta AD es (x,y,z) = (0,0,0) + g(r,s,t) ; su intersección con π'' es G$\left(\frac{re}{tq},\frac{se}{tq},\frac{te}{tq}\right)$

La recta BC es (x,y,z9 0 (n,0,0) + h(p-n,q,0) ; su intersección con π'' es H$\left(\frac{ntq-ne+pe}{tq},\frac{qe}{tq},0\right)$

La recta BD es (x,y,z) = ((n.0.0) + i(r-n, s,t) ; su intersección con π'' es I$\left(\frac{ntq-ne+re}{tq},\frac{se}{tq},\frac{te}{tq}\right)$

(nota: se han omitido los detalles de cálculo porque son pesados ,no aportan nada y están al alcance de cualquier lector)

Tenemos pues que la sección es el cuadrilátero FGHI cuya área es la suma de las áreas de los triángulos FGH y HIF

De los puntos obtenidos, haciendo extremo – origen, podemos hallar las componentes vectores $\overrightarrow{GF}=\left(\frac{pe-re}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right)$; $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{ntq-ne+pe-re}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right)$;

$$\overrightarrow{IH}=\left(\frac{pe-re}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right);\ \overrightarrow{IF}=\left(\frac{pe-re+ne-ntq}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right)$$

Multiplicando vectorialmente tenemos:

$\overrightarrow{GF}\,x\,\overrightarrow{GH}=\frac{en(e-tq)}{(tq)^2}\cdot\ (0,t,q-s)\ ;\ \overrightarrow{IH}\,x\,\overrightarrow{IF}=\frac{en(e-tq)}{(tq)^2}\cdot(0,-t,-(q-s))$

Área triángulo FGH = $\frac{|\overrightarrow{GF}\,x\,\overrightarrow{GH}|}{2}$ = $\left|\frac{en(e-tq)\sqrt{t^2+(q-s)^2}}{2(tq)^2}\right|$= $\frac{|\overrightarrow{IH}\,x\,\overrightarrow{IF}|}{2}$ = área triángulo HIF

Así pues área de la sección = $\left|\frac{en(e-tq)\sqrt{t^2+(q-s)^2}}{(tq)^2}\right|$

Siendo f<1, tendremos $\frac{e}{qt}$< 1 ===>e <qt ===> e – qt< 0

El valor absoluto que aparece en la expresión del área la hace positiva y con ello tendremos:

Área de la sección = $\frac{n\sqrt{t^2+(q-s)^2}}{(tq)^2}$ ·e(tq-e) .

Para maximizar el área basta maximizar e(tq – e) = tqe – e^2

Derivando tq-2e =0 tenemos e = $\frac{tq}{2}$

Así pues de todos los planes del haz π'' el que maximiza la sección es$\boldsymbol{\pi}$: **–ty + (s-q)z +** $\boldsymbol{\frac{tq}{2} = 0}$

Veamos que este plano biseca la mínima distancia entre AB y CD

$$d(AB,\pi) = d(A,\pi) = \left|\frac{\frac{tq}{2}}{\sqrt{t^2+(q-s)^2}}\right| = \frac{\left|\frac{-tq}{\sqrt{t^2+(s-q)^2}}\right|}{2} = \frac{d(AB,CD)}{2}$$

$$d(CD,\pi) = d(C,\pi) = \left|\frac{-tq+(s-q)0+\frac{tq}{2}}{\sqrt{t^2+(q-s)^2}}\right| = \left|\frac{-\frac{tq}{2}}{\sqrt{t^2+(q-s)^2}}\right| = \frac{\left|\frac{-tq}{\sqrt{t^2+(s-q)^2}}\right|}{2} = \frac{d(AB,CD)}{2}$$

Con esto hemos terminado.