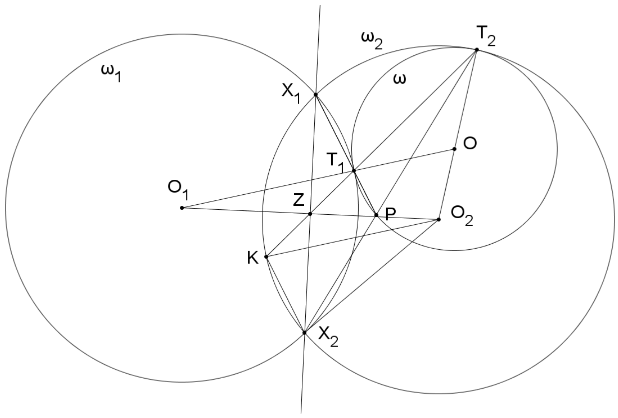
Problema 4 Olimpiada Matemática Europea Femenina

Problema 4. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω, tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se cortan en un punto que pertenece a ω.



Solución. Sean O, O_1 y O_2 los centros de ω, ω_1 y ω_2 respectivamente. Véase que al ser ω tangente a ω_1 y a ω_2, los centros tienen que estar alineados con el punto de tangencia, es decir, $O \in O_1 + T_1$ y $O \in O_2 + T_2$.

Consideramos la homotecia de centro T_2 que lleva ω en ω_2, y que lleva $T_1 \to K$, siendo $K = (T_1 + T_2) \cap \omega_2$, y $O \to O_2$, por lo que los triángulos T_2T_1O y T_2KO_2 son semejantes, y al compartir vértice T_2 y lados $T_2 + O_2$ y $T_2 + K$ tenemos que $T_1 + O$ y $K + O_2$ son paralelas.

Si consideramos el punto Z como el punto medio del segmento O_1O_2 y la simetría central respecto de Z tenemos que $O_1 \to O_2$, y como las simetrías centrales respecto de un punto transforman rectas en rectas paralelas, tenemos que $O_1 + T_1 \to O_2 + K$, luego $T_1 \to K$ por esta simetría central.

Ahora bien, como ambas circunferencias tienen el mismo radio, tenemos que Z está en el eje radical de ω_1 y ω_2, que es $X_1 + X_2$, luego $X_1 \to X_2$ por la simetría central respecto de Z. De aquí que $X_1 + T_1$ y $X_2 + K$ sean paralelas, porque son la imagen la una de la otra por esta simetría.

Sea $P = (X_1 + T_1) \cap (X_2 + T_2)$, el punto que queremos ver que está sobre ω. Volviendo a la homotecia de centro T_2 que lleva ω en ω_2 tenemos que por el paralelismo entre $X_1 + T_1 = T_1 + P$ y $X_2 + K$, se da $P \to X_2$ por la dicha homotecia, ya que $T_1 \to K$ por lo visto antes, y de aquí la semejanza entre T_2PO y $T_2X_2O_2$. Como $T_2X_2O_2$ es isósceles porque dos de sus lados son radios de ω_2, T_2PO también es isósceles y tenemos que $T_2O = PO$, por tanto $P \in \omega$, como queríamos probar.

Solución por Jesús Dueñas Pamplona