Problema 284. *Probar que la ecuación cúbica*

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \tag{1}$$

puede escribirse como

$$\phi(y-\theta)^3 = \theta(y-\phi)^3, \tag{2}$$

donde $y = ax + b$ *y los números* ϕ, θ *son las raíces de la ecuación cuadrática*

$$(ac - b^2)t^2 + (a^2d - 3abc + 2b^2)t - (ac - b^2)^2 = 0. \tag{3}$$

Escribir las tres raíces en función de ϕ, θ.

Expresar la ecuación $5x^3+21x^2+30x+14 = 0$ *en esa forma y resolverla.*

Propuesto por el editor.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Haciendo en (1) la sustitución $x = \frac{y-b}{a}$ obtenemos la expresión

$$y^3 + 3(ac - b^2)y + (a^2d - 3abc + 2b^2) = 0. \tag{4}$$

Por otro lado, usando la identidad

$$\phi(y-\theta)^3 - \theta(y-\phi)^3 = (\phi-\theta)(y^3 - 3\phi\theta y + \phi\theta(\phi+\theta)),$$

resulta que, suponiendo $\phi \neq \theta$, (2) es equivalente a

$$y^3 - 3\phi\theta y + \phi\theta(\phi+\theta) = 0. \tag{5}$$

Comparando (4) y (5), tenemos

$$\begin{cases} \phi\theta = -(ac-b^2) \\ \phi\theta(\phi+\theta) = a^2d - 3abc + 2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi\theta = -(ac-b^2) \\ \phi+\theta = -\dfrac{a^2d - 3abc + 2b^2}{ac-b^2} \end{cases},$$

por lo que ϕ, θ son soluciones de la ecuación

$$t^2 + \frac{a^2d - 3abc + 2b^2}{ac - b^2}t - (ac - b^2) = 0,$$

equivalente a (3).

A partir de (2),

$$\left(\frac{y-\theta}{y-\phi}\right)^3 = \frac{(y-\theta)^3}{(y-\phi)^3} = \frac{\theta}{\phi} \Rightarrow \frac{y-\theta}{y-\phi} = \lambda\omega,$$

siendo $\lambda = \sqrt[3]{\theta/\phi}$ y ω una raíz cúbica de la unidad. A partir de aquí obtenemos

$$y = \frac{\phi\lambda\omega - \theta}{\lambda\omega - 1} \Rightarrow x = \frac{\frac{\phi\lambda\omega-\theta}{\lambda\omega-1} - b}{a}.$$

Aplicando el método a $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$, tenemos $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$, $c = 14$, por lo que $ac - b^2 = 1$ y $a^2d - 3abc + 2b^2 = -14$ por lo que θ y ϕ son las soluciones de la ecuación $t^2 - 4t + 1 = 0$, es decir podemos considerar

$$\theta = 7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3,$$
$$\phi = 7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3.$$

¡Es un golpe de suerte que θ y ϕ tengan raíces cúbicas sencillas! Entonces en este caso resulta

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{2} - 3.$$

Las soluciones de y son de la forma

$$y = \frac{\phi\lambda\omega - \theta}{\lambda\omega - 1} = \frac{(7 + 5\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 2)\omega - (7 - 5\sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - 2)\omega - 1},$$

siendo ω uno de los números complejos

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Así obtenemos los valores

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1 + \sqrt{6}i, \quad y_3 = -1 + \sqrt{6}i,$$

y teniendo en cuenta que $x = (y - 7)/5$, obtenemos los valores de x:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{8}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}i, \quad x_3 = -\frac{8}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}i.$$