

Problemas de la 5ª Olimpiada Matemática europea femenina. Abril 2016. Rumania

Problema nº 3 (Propuesto por México)

Sea m entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están relacionadas si están ya en la misma fila o en la misma columna. Ninguna casilla está relacionada con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul de manera que cada casilla está relacionada al menos con dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Solución: (propuesta por Joaquim Nadal Vidal. Llagostera, Girona)

Una casilla azul A_1 debe estar relacionada, como mínimo, con otras dos azules A_2 y A_3

Esto puede conseguirse situando A_2 y A_3 en la misma fila que A_1 , en la misma columna o una en su fila y otra en su columna.

Esta tercera opción hace aumentar el número de azules necesario pues A_2 y A_3 necesitarán cada una de ellas una segunda casilla azul con la que relacionarse.

Así pues lo mejor es que las casillas azules estén alineadas en una misma fila o columna.

Ahora bien, si sólo hay una alineación de azules las casillas blancas no podrán tener dos relaciones. Para conseguir esto basta poner una fila y una columna de azules. Dejando blanca la casilla de cruce tendremos $8m - 2$ casillas azules y $16m^2 - 8m + 2$ casillas blancas

Cada casilla azul está relacionada con $4m - 2$ casillas azules

Cada casilla blanca, excepto la de cruce, está relacionada con dos casillas azules

La casilla blanca situada en el cruce está relacionada con $8m - 2$ casillas azules

Para $m=2$ tendríamos la siguiente tabla con 14 casillas azules

			A				
			A				
			A				
A	A	A		A	A	A	A
			A				
			A				
			A				
			A				