Problema 284, propuesto por el editor.

Probar que la ecuación cúbica $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$, puede escribirse como $\alpha(y-\beta)^3=\beta(y-\alpha)^3$, donde $y=ax+b$, y los números α,β son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$(ac-b^2)t^2+(a^2d-3abc+2b^3)t-(ac-b^2)^2=0.$$

Escribir las tres raíces en función de α,β.

Expresar la ecuación $5x^3+21x^2+30x+14=0$ en esa forma y resolverla.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

La ecuación cúbica inicial, $ax^3+3bx^2+3cx+d=0 \quad (a\neq 0)$, podemos expresarla del modo:

$$x^3+3\frac{b}{a}x^2+3\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0 \ \ (I)$$

y haciendo el cambio sugerido, $y=ax+b$, podemos llegar a la ecuación siguiente:

$$y^3-3(b^2-ac)y+(a^2d-3abc+2b^3)=0 \quad (II)$$

Si desarrollamos la expresión $\alpha(y-\beta)^3=\beta(y-\alpha)^3$, determinaremos los valores de $\alpha\ y\ \beta$ que permitirán así, obtener una ecuación equivalente a (II).

Para ello, observamos que si $\alpha\neq\beta$, la ecuación:

$$(\alpha-\beta)y^3-3(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)y+(\alpha^3\beta-\alpha\beta^3)=0$$

será equivalente a esta otra:

$$y^3-3\alpha\beta y+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0 \ \ (III)$$

Para ello, deberá suceder que:

$$\begin{cases} b^2-ac=\alpha\beta \\ a^2d-3abc+2b^3=\alpha\beta(\alpha+\beta)\end{cases}$$

Por tanto, pueden suceder dos casos:

Caso 1. $\quad b^2-ac=0\rightarrow y^3+(a^2d-3abc+2b^3)=0 \quad (II)\rightarrow Ecuación\ trivial.$

Caso 2. $\quad b^2-ac\neq 0\rightarrow \begin{cases} b^2-ac=\alpha\beta \\ \frac{a^2d-3abc+2b^3}{b^2-ac}=\alpha+\beta\end{cases} \rightarrow \alpha\ y\ \beta\ son\ las\ raíces\ de\ la\ ecuación\ de\ segundo\ grado$:

$$t^2+\frac{a^2d-3abc+2b^3}{ac-b^2}t+b^2-ac=0.$$

Por tanto, en función de α,β, las raíces de la ecuación cúbica se expresarán del siguiente modo.

$$\alpha(y-\beta)^3=\beta\big(y-\alpha\big)^3\rightarrow(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})y=\sqrt[3]{\alpha}\beta-\alpha\sqrt[3]{\beta}\rightarrow y=\frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta-\alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}.$$

Ahora bien, en esta última expresión debemos considerar las tres raíces cúbicas de $\alpha\ y\ \beta$.

Sean estas raíces cúbicas $\{\sqrt[3]{\alpha},w\sqrt[3]{\alpha},w^2\sqrt[3]{\alpha}\}\ y\ \{\sqrt[3]{\beta},w\sqrt[3]{\beta},w^2\sqrt[3]{\beta}\}$, donde $w\ y\ w^2$ son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

Observamos que sólo hay tres posibilidades de valores distintos para y.

$$y_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}}; \quad y_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}}; \quad y_3 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}}$$

Las otras posibilidades conducen cíclicamente a alguna de los valores anteriores.
Observamos esto último, con mayor detalle:

$$y'_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}w} = y_3; \quad y'_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w^2}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}w^2} = y_2;$$

$$y''_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}w} = y_1; \quad y''_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w^2}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}w^2} = y_3;$$

$$y'''_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}w} = y_2; \quad y'''_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w^2}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}w^2} = y_1;$$

Vamos ahora a desarrollar y simplificar las soluciones $y_i,\ i = 1,2,3$.

$$y_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha - \beta} = -\sqrt[3]{\alpha\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}w^2 + \sqrt[3]{\alpha\beta}w + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha - \beta} = -\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right)$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}w + \sqrt[3]{\alpha\beta}w^2 + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha - \beta} = -\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right)$$

Como quiera que $x = \frac{y-b}{a}$, así de esta forma, obtenemos las tres raíces cúbicas de la ecuación inicial $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 - b}{a} = \dfrac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} \\ x_2 = \dfrac{y_2 - b}{a} = \dfrac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} \\ x_3 = \dfrac{y_3 - b}{a} = \dfrac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - b}{a} \end{cases} \quad (IV)$$

Aplicamos este método para resolver la ecuación cúbica $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$.
Sabemos que $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = (x+1)(5x^2 + 16x + 14)$
La ecuación $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$ tendrá como raíces, $\left\{x = -1, x = \frac{1}{5}\left(-8 - i\sqrt{6}\right), \mathrm{x} = \frac{1}{5}\left(-8 + i\sqrt{6}\right)\right\}$.
Según nuestro método, reducimos la ecuación $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$ haciendo el cambio de variable $y = 5x + 7$, a esta otra, $y^3 + 3y - 14 = 0$. Observamos que una de las raíces de esta ecuación es $y = 2$.
Sean $\alpha\ y\ \beta$, son raíces de la ecuación

$$t^2 + \frac{a^2d - 3abc + 2b^3}{ac - b^2}t + b^2 - ac = 0.$$

Por tanto, sustituyendo los coeficientes $a, b, c\ y\ d$, obtendremos $\alpha\ y\ \beta$, como las raíces de la ecuación $t^2 - 14t - 1 = 0$. En definitiva, $\alpha = 7 + 5\sqrt{2}$, $\beta = 7 - 5\sqrt{2}$.

Sustituyendo ahora los valores obtenidos en (IV), hallamos por fin, las soluciones de la ecuación cúbica propuesta:

$$x_1 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta} \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} = \frac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} - 7}{5}$$

Vamos a hallar el valor real de $P = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.
Sean $M = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\ y\ N = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, entonces $P = M + N$.
Como quiera que $P^3 = (M + N)^3 = M^3 + 3M^2N + 3MN^2 + N^3 = 14 + 3MN(M + N) = 14 - 3(M + N)$.
En definitiva, $P^3 + 3P - 14 = 0$.
Y como quiera que $P = 2$ es raíz de dicha ecuación, podemos factorizar dicha polinomio del modo,

$$P^3 + 3P - 14 = (P - 2)(P^2 + 2P + 7) = 0.$$

Como quiera que no existe raíz real alguna para el segundo factor $P^2 + 2P + 7$, necesariamente $P = 2$.
Por tanto,

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} - 7}{5} = \frac{2 - 7}{5} = -1.$$

Análogamente, hallaremos las otras dos raíces $x_2\ y\ x_3$.

$$x_2 = \frac{y_2 - b}{a} = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a}$$

$$x_3 = \frac{y_3 - b}{a} = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - b}{a}$$

Vamos a comprobar que $\begin{cases} x_2 + x_3 = -\frac{16}{5} \\ x_2 \cdot x_3 = \frac{14}{5} \end{cases}$.

En efecto,

$$x_2 + x_3 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - 2b}{a}$$

$$x_2 + x_3 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot (\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})(w + 1) - 2b}{a} = \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) - 2b}{a} = \frac{(-1) \cdot 2 - 14}{5} = -\frac{16}{5}$$

$$x_2 \cdot x_3 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} \cdot \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - b}{a}$$

$$x_2 \cdot x_3 = \frac{\sqrt[3]{(\alpha\beta)^2} \cdot \left[\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right)^2 - 3\sqrt[3]{\alpha\beta}\right] - b\sqrt[3]{\alpha\beta}\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right) + b^2}{a^2} = \frac{[4 + 3] + 2b + b^2}{a} = \frac{70}{25} = \frac{14}{5}$$

Por tanto, en efecto, las raíces cúbicas de la ecuación inicial son $\left\{-1,\ \frac{1}{5}\left(-8 - i\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{5}\left(-8 + i\sqrt{6}\right)\right\}$.