Problemas 286-290

Problema 286, propuesto por D.M.Batinetu-Giurgiu y N. Stanciu, Rumania

Si $A_1A_2\cdots A_n$ es un polígono convexo de área S y lados [A_k, A_{k+1}] de longitudes a_k, donde k varía de 1 a n, y a_{n+1} = a_1, *demostrar que*

$$\sum_{cyclic}\left(\left(a_k^{\ 4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\ 4}+1\right)\right)^{\frac{m+1}{2}} \geq \frac{2^{3(m+1)}S^{m+1}}{n^m}\tan^{m+1}\frac{\pi}{n}.$$

Problema 287, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Hallar la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus resultados pueda ser igual a la última cifra del número 2017^{2017}.

Problema 288, propuesto por Pierre Lapôtre, Calais, Francia

Se considera un punto fijo P y dos rectas r y r' (concurrentes o paralelas). Una secante variable que pasa por P corta a r en A y a r' en B.

1) Demostrar que los lugares geométricos de los puntos M y N tales que $(PABM)=(PBAN)=-1$ son rectas D y D' del mismo haz que r y r'.
2) Demostrar que P tiene la misma polar con respecto a (r,r') y con respecto a (d,D')

Problema 289, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, León, España

ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O, y D es el pie de la altura desde A. Las rectas por D perpendiculares a AB y a AC cortan a OB y OC en los puntos P y Q, respectivamente.

Suponiendo que O, P y Q son distintos, probar que la circunferencia que los contiene es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC.

Problema 290, propuesto por Samael Gamboa Quezada, Trujillo, Perú.

Sean x e y números reales positivos tales que $x^3+y^3=2xy$.

Demostrar que $x+y\geq x^7+y^7$.