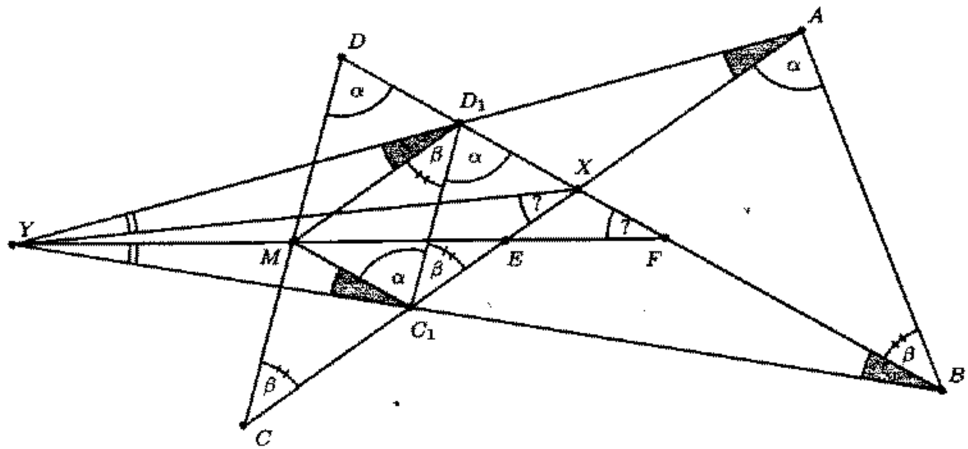
Solución del Problema 2 de la EGMO 2016

Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León

Incluimos en una figura los elementos del enunciado.



Para establecer la condición de tangencia pedida debe probarse que la recta YX forma con XE un ángulo igual al inscrito en esa cuerda en la circunferencia circunscrita, esto es, debemos ver la igualdad de los ángulos marcados como '?'.

Razonando con las paralelas medias del triángulo CDX vemos que se forma un paralelogramo MC_1D_1D, lo cual combinado con igualdades de ángulos inscritos en el cuadrilátero cíclico $ABCD$ permite asegurar las igualdades entre los cuatro ángulos denotados por α en la figura, y de forma similar los cuatro β son iguales entre sí.

En particular, la igualdad $\angle C_1D_1B = \angle C_1AB$ prueba que el cuadrilátero ABC_1D_1 es cíclico, y en consecuencia $\angle D_1AC_1 = \angle D_1BC_1$, ángulo que denotamos como γ, y que se propaga por paralelas obteniendo $\angle YD_1M = \angle MC_1Y = \gamma$.

A continuación, observamos que los triángulos YAB e YC_1D_1 tienen los mismos ángulos, luego son correspondientes en una semejanza que llamamos f. Además, también son semejantes ABX y C_1D_1M, por tener ambos un ángulo α y otro β.

Nótese que es posible "pegar" las dos semejanzas observadas en una. En efecto: X se corresponde con M por la transformación f ya que X es interior al triángulo YAB, M es interior a YC_1D_1 y las rectas XA, XB forman con AB los mismos ángulos que forman MC_1, MD_1 con C_1D_1. En consecuencia, por ser X, M correspondientes se tiene la igualdad $\angle XYA = \angle MYC_1$, la cual sumada a $\angle YAX = \angle FBY$ permite deducir que $\angle YXE = \angle XFE$, como queríamos demostrar.