ALGUNAS HOMOGRAFÍAS EN EL TRIÁNGULO

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN

Resumen. Hacemos una introducción a las homografías entre puntos de una recta y entre rectas de un haz y aplicamos dichos conceptos a algunos casos en el ámbito del triángulo.

1. Homografías entre rectas

1.1. Homografía. Una homografía entre dos rectas o entre dos haces de rectas es una biyección que conserva las razones dobles. Nosotros aquí no usaremos la razón doble, sólo que una homografía queda determinada por tres elementos y sus imágenes. [1]

Dadas dos ternas A, B, C y A', B', C' de puntos alineados sobre dos rectas distintas, existe una única homografía entre las dos rectas tal que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ y $h(C) = C'$.

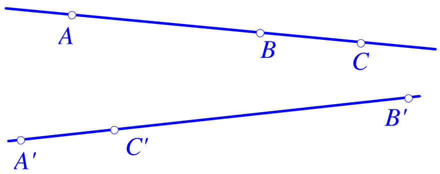

Fig. 1: Homografía.

1.2. Eje de homografía. Si (M, M') y (N, N') son dos pares de puntos homólogos, el lugar de los puntos $MN' \cap M'N$ es una recta, llamada eje de la homografía. En particular, los puntos de intersección $X = BC' \cap B'C$, $Y = CA' \cap C'A$ y $Z = AB' \cap A'B$, que están alineados por el teorema de Pappus, son puntos del eje de homografía.

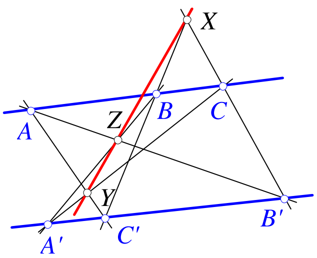

Fig. 2: Eje de homografía.

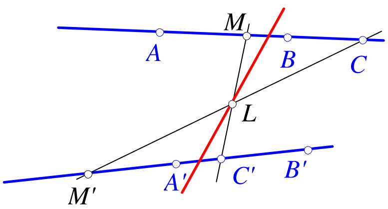

Fig. 3: Imagen de un punto.

[1]Se aconseja leer este documento usando un programa de geometría dinámica como *Cabri* o *Geogebra* e ir creando sobre la marcha las figuras que aparecen en el texto.

1.3. Imagen de un punto. Si conocemos el eje de homografía y un par de puntos homólogos, podemos hallar la imagen M' de cualquier punto M: basta hallar la intersección L de $C'M$ con el eje de homografía, y luego la intersección M' de CL y la recta $A'B'$.

2. Dualidad

En Geometría Proyectiva, al incluir los puntos del infinito, son totalmente válidos, sin excepciones, los axiomas

1. Por cada dos puntos pasa una y sólo una recta.
2. Cada dos rectas se cortan en un y sólo un punto.

Una consecuencia bella y útil de esto es que cualquier enunciado que se exprese en términos de intersecciones de rectas y de rectas que pasan por dos puntos, puede traducirse a otro enunciado en el que intercambiamos los dos conceptos, obteniendo así otro enunciado igualmente válido.

Por ejemplo, consideremos el teorema de Desargues y su dual.

Teorema de Desargues. *Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, sean los puntos $X = BC \cap B'C'$, $Y = CA \cap C'A'$,$Z = AB \cap A'B'$. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Los puntos X, Y y Z están alineados.*
2. *Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.*

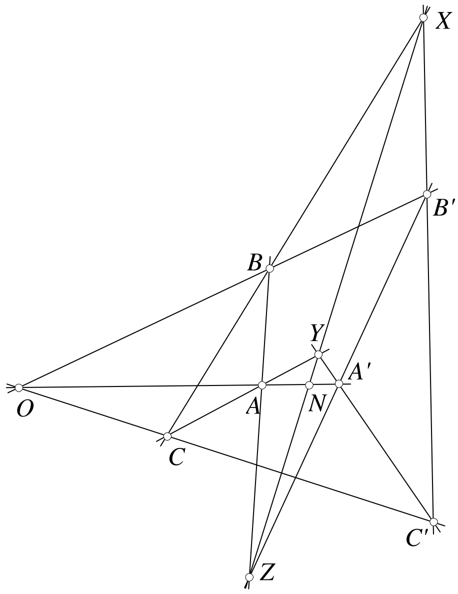

Fig. 4: Teorema de Desargues.

Dual del teorema de Desargues. *Dados dos triláteros abc y $a'b'c'$, sean las rectas $x = (b \cap c)(b' \cap c')$, $y = (c \cap a)(c' \cap a')$ y $z = (a \cap b)(a' \cap b')$. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1'. *Las rectas x, y, z son concurrentes.*

2'. *Los puntos $a \cap a'$, $b \cap b'$ y $c \cap c'$ están alineados.*

En este caso, la dualidad permite que si demostramos que $1 \Rightarrow 2$, entonces no tenemos que buscar una demostración de que $2 \Rightarrow 1$, ya que si $1 \Rightarrow 2$ entonces también será cierto, por el principio de dualidad, que $1' \Rightarrow 2'$, que en este caso equivale esencialmente a que $2 \Rightarrow 1$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1 \Rightarrow 2} \arrow[r, "\text{dual}"'] \arrow[d] & \boxed{1' \Rightarrow 2'} \arrow[d] \\
\boxed{2' \Rightarrow 1'} \arrow[r, "\text{dual}"'] & \boxed{2 \Rightarrow 1}
\end{tikzcd}$$

Demostración de $1 \Rightarrow 2$. Si las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes (Figura 4), la homografía $\pi : AA' \to CC'$, compuesta por la proyección $\pi_1 : AA' \to BB'$ desde Z y la proyección $\pi_2 : BB' \to CC'$ desde X es también una proyección. De $C = \pi(A)$ y $C' = \pi(C)$, se deduce que $Y = AC \cap A'C'$ es el centro de π. Por construcción, los puntos $N = XZ \cap AA'$ y $\pi(N)$ pertenecen a la recta XZ; como la recta $N\pi(N)$ pasa por Y, el punto Y pertenece a la recta XZ.

3. Homografías entre haces de rectas

Haciendo uso de la dualidad, podemos expresar todo lo dicho en la sección 1 sobre homografías entre rectas en términos de homografías entre haces de rectas.

Dadas dos ternas a, b, c y a', b', c' de rectas concurrentes en dos puntos distintos, existe una única homografía h^* entre los dos haces O^* y O'^* tal que $h^*(a) = a'$, $h^*(b) = b'$ y $h^*(c) = c'$.

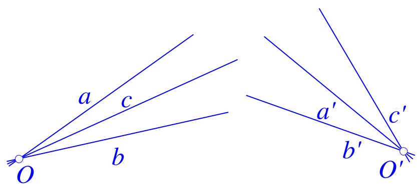

Fig. 5: Homografía entre haces.

3.1. Centro de homografía. Si (m, m') y (n, n') son dos pares de rectas homólogas por la homografía, todas las rectas $(m \cap n')(m' \cap n)$ pasan por un punto fijo S, llamado centro de la homografía.

En particular, las rectas $x = (b \cap c')(b' \cap c)$, $y = (c \cap a')(a' \cap b)$ y $z = (a \cap b')(a' \cap b)$ pasan por S.

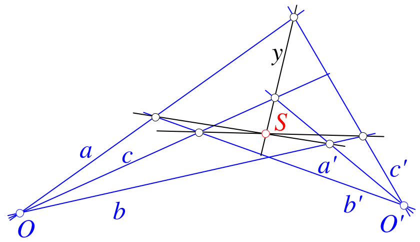

Fig. 6: Centro de homografía.

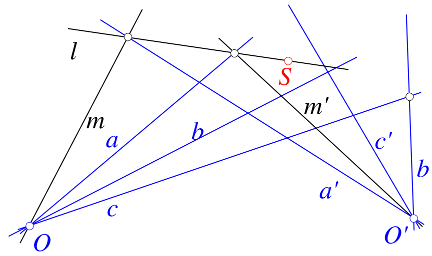

Fig. 7: Imagen de una recta.

3.2. Imagen de una recta. Si conocemos el centro S y un par de rectas homólogas, por ejemplo (a, a'), para hallar la imagen de una recta m, hallamos la recta $l = S(a' \cap m)$, y la imagen de m será $m' = O'(l \cap a)$.

4. Proyecciones

Una homografía h entre dos rectas es una proyección si la recta MM' que une dos puntos homólogos pasa siempre por un punto fijo Q, llamado centro de la proyección.

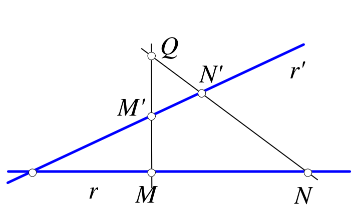

Fig. 8: Proyección entre rectas.

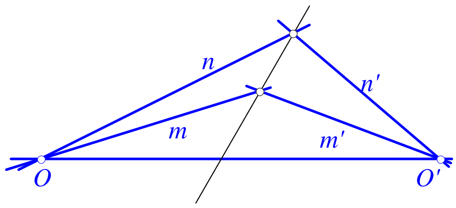

Fig. 9: Proyección entre haces.

De forma dual, una homografía h entre dos haces rectas es una proyección si el punto de intersección $m \cap m'$ de dos rectas homólogas está siempre sobre una misma recta, llamada eje de la proyección.

Esta es una caracterización muy sencilla y útil de de las proyecciones:

Teorema. *Una homografía entre rectas es una proyección si y solo si el punto de intersección de las dos rectas se transforma en sí mismo. Una homografía entre haces de rectas es una proyección si y solo si la recta que une los puntos base de los haces se transforma en sí misma.*

5. El teorema de Chasles-Steiner

El teorema de Chasles-Steiner nos dice cuándo los haces homólogos de una homografía entre haces se cortan en puntos de una cónica:

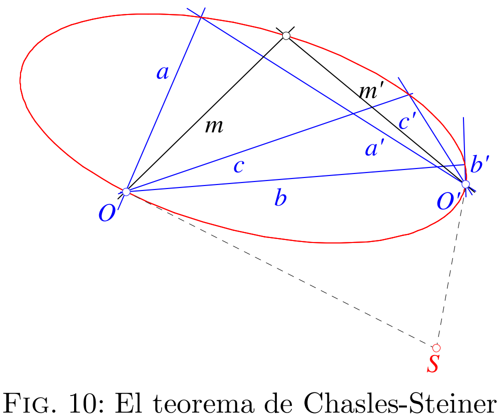

Fig. 10: El teorema de Chasles-Steiner.

Teorema. *Sea h^* una homografía entre dos haces de rectas O^* y O'^* con centro de homografía S. Si h^* no es una proyección, el lugar geométrico de los puntos $m \cap h^*(m)$ es una cónica que pasa por O y O', y cuyas tangentes en dichos puntos son las rectas SO y SO'.*

Cuando las rectas m y m' sean paralelas, el punto de la cónica estará en el infinito.

6. Homografías en un triángulo

Sean ABC un triángulo y P un punto con triángulo ceviano UVW. Nos olvidamos por ahora del punto U y a cambio consideramos el conjugado armónico U' de U respecto de B y C:

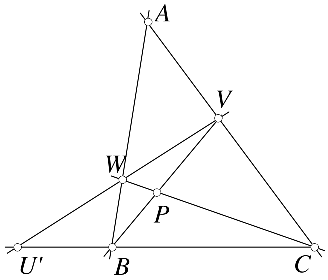

Fig. 11: Un triángulo y un punto.

En la recta AB podemos considerar la terna de puntos A, B, W, y en la recta AC podemos considerar la terna de puntos A, C, V.

Es natural considerar las seis homografías de la recta AB en la recta AC que transforman los puntos A, B, W de AB en una permutación de los puntos A, C, V de AC.

	1	2	3	4	5	6
A	A	A	C	C	V	V
B	C	V	A	V	A	C
W	V	C	V	A	C	A

Para cada una de estas homografías $h : AB \to AC$, consideramos la homografía $h^* : C^* \to B^*$ definida por $h^*(m) = Bh(m \cap AB)$, es decir, para cada Z sobre AB, se calcula $Y = h(Z)$ y entonces es $h^*(CZ) = BY$.

Cuando h^* es una proyección el lugar $\mathcal{L}_h$ de los puntos de la forma $m \cap h^*(m)$ será una recta y en caso contrario será una cónica.

Nos planteamos las siguientes cuestiones:

I ¿Es h una proyección? En caso afirmativo, ¿cuál es el centro de proyección de h?
II ¿Cuál es el eje de homografía de h?
III ¿Cuál es el centro de homografía de h^*?
IV ¿Es h^* una proyección? En caso afirmativo, ¿cuál es eje de proyección de h^*?
V $\mathcal{L}_h$ puede ser una recta o una cónica que pasa por B y C.
VI Si $\mathcal{L}_h$ es una cónica,
- ¿Conocemos cinco puntos para trazar la cónica $\mathcal{L}_h$?
- ¿Podemos trazar fácilmente el centro de $\mathcal{L}_h$?
- Si $\mathcal{L}$? es una hipérbola o parábola, ¿podemos obtener sus puntos del infinito?
- ¿Qué tipo de cónica es $\mathcal{L}_h$ dependiendo de P?

7. La proyección $\pi_{U'} : ABW \to ACV$

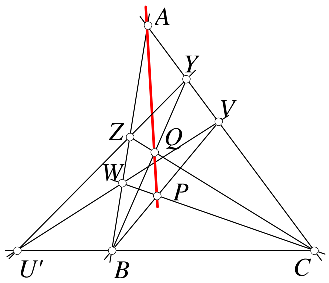

Fig. 12: La proyección $\pi_{U'}$.

I La homografía $\pi_{U'}$ que transforma A, B, W en A, C, V respectivamente es la proyección con centro U' (Figura 11).

II Usando los pares de puntos homólogos, el eje de la homografía de $\pi_{U'}$ pasa por el punto $BV \cap WC = P$, y usando los pares (A, A) y (B, C), el eje de homografía también pasa por el punto $AC \cap BA = A$, por lo tanto el eje de homografía es la recta AP.

III Como $\pi_{U'}(B) = C$, se cumple que $\pi^*_{U'}(CB) = BC$ y por tanto $\pi^*_{U'}$ es una proyección.

IV El centro de homografía de $\pi^*_{U'}$ es U'. En efecto, usando los pares de rectas homólogas (CA, BA) y (CW, BV), éste debe estar sobre la recta $(CA \cap BV)(CW \cap BA) = VW$, y, usando los pares (CB, BC) y (CW, BV), debe también estar sobre la recta $(CB \cap BV)(CW \cap BC) = BC$.

V Usando los pares (CA, BA) y (CW, BV) de rectas homólogas de la proyección $\pi^*_{U'}$, la recta $\mathcal{L}_{U'}$ pasa por los puntos $A = CA \cap BA$ y $P = CW \cap BV$, por lo que $\mathcal{L}_{U'}$ es la recta AP.

8. La proyección $\pi_P : ABW \to AVC$

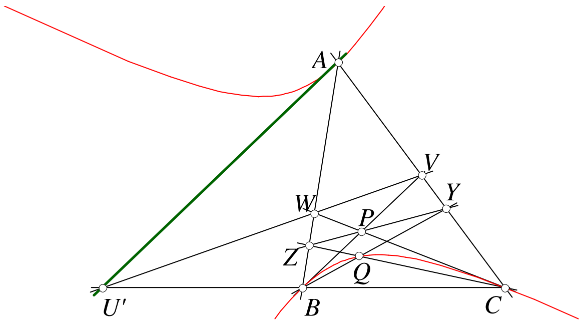

Fig. 13: La proyección π_P.

I La homografía π_P que transforma A, B, W en A, V, C respectivamente es la proyección con centro P (Figura 12).

II Usando los pares de puntos homólogos (A, A) y (B, V), el eje de homografía de π_P pasa por el punto $AV \cap BA = A$, y usando los pares (B, V) y (W, C), también pasa por $BC \cap VW = U'$, por lo que el eje de homografía es la recta AU'.

III Como $\pi_P(B) = V$, la homografía π_P^* cumple que $\pi_P^*(CB) = BV$ y por tanto no es una proyección. En consecuencia, $\mathcal{L}_P$ es una cónica.

IV Usando los pares de rectas homólogas (CA, BA) y (CB, BV), el centro de homografía de π_P^* debe estar contenido en la recta $(CA \cap BV)(CB \cap BA) = VB$, y usando el par de rectas homólogas (CB, BV) y (CW, BC), también debe estar contenido en la recta $(CB \cap BC)(CW \cap BV) = CP$, por lo que el centro de homografía de π_P^* es P.

V La cónica $\mathcal{L}_P$ pasa por B y C y sus tangentes en B y C son las rectas BP y CP respectivamente.

VI Usando coordenadas baricéntricas, si $P = (u : v : w)$ podemos comprobar algunas propiedades de esta cónica:

- La ecuación de $\mathcal{L}_P$ es $-uyz + vzx + wxy = 0$, la circuncónica con perspector $A' = (-u : v : w)$, siendo $A'B'C'$ el triángulo anticeviano de P.
- El centro de $\mathcal{L}_P$ es el complemento del conjugado isotómico del anticomplemento de A', el punto con coordenadas $(u(u + v + w) : v(u + v - w) : w(u - v + w))$.
- La recta que une los conjugados isogonales de los puntos del infinito de $\mathcal{L}_P$ es la recta $b^2c^2ux - a^2c^2vy - a^2b^2wz = 0$, que es la polar respecto de la circunferencia circunscrita del conjugado isogonal de A'.
- El discriminante de $\mathcal{L}_P$ es $(u + v + w)^2 - 4vw$. La cónica $\mathcal{H}_a$ con ecuación $(x + y + z)^2 - 4yz = 0$ es la hipérbola inscrita al triángulo con perspector $(-1 : 1 : 1)$. Esta hipérbola tiene por centro A, y por asíntotas las rectas AB y AC. En particular, si P está sobre $\mathcal{H}_a$, entonces $\mathcal{L}_P$ es una parábola.

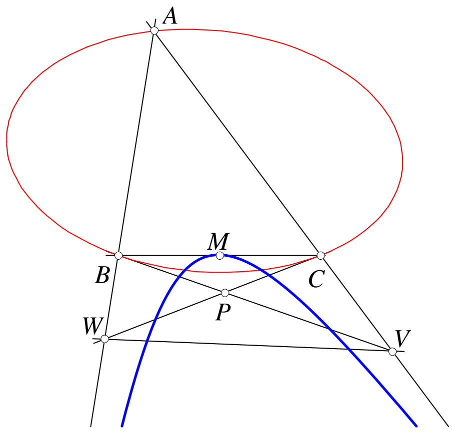

FIG. 14: La hipérbola $\mathcal{H}_a$.

En la figura vemos un caso en el que $\mathcal{L}_P$ es una elipse.

9. La homografía $h_{BC} : ABW \to CAV$

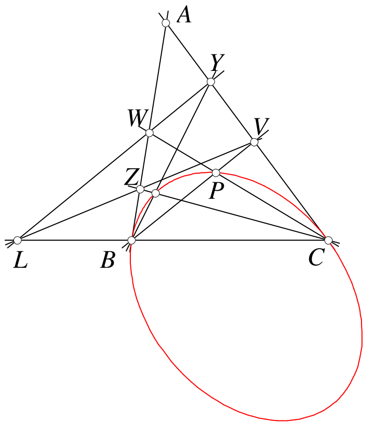

Fig. 15: La homografía h_{BC}.

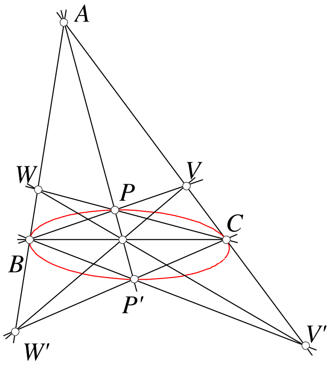

Fig. 16: $\mathcal{L}_{BC}$ pasa por P'.

I Sea $h_{BC} : AB \to AC$ la homografía que aplica A, B, W en C, A, V. No se trata de una proyección.

II Usando los pares de puntos homólogos (B, A) y (W, V), el eje de homografía pasa por $BV \cap AW = B$, y usando los pares de puntos homólogos (A, C) y (W, V), también pasa por el punto $AV \cap WC = C$, por lo que el eje de homografía de h_{BC} es BC.

III Como $h^*_{BC}(CB) = BA$, la homografía h^*_{BC} no es una proyección.

IV Teniendo en cuenta los pares de rectas homólogas (CA, BC), (CB, BA) y (CW, BV), el centro de la homografía h^*_{BC} está sobre la recta $(CA \cap BV)(CW \cap BC) = VC$ y también sobre la recta $(CB \cap BV)(CW \cap BA) = WB$, por lo que es el punto $VC \cap WB = A$.

V La cónica $\mathcal{L}_{BC}$ pasa por B, C, P, y las tangentes en B y C son las rectas AB y AC respectivamente. Algunas propiedades más de la cónica $\mathcal{L}_{BC}$.

- La segunda intersección de $\mathcal{L}_{BC}$ con la recta AP es el conjugado armónico P' de P respecto de AL, siendo L la intersección de AP y BC.
- La ecuación de $\mathcal{L}_{BC}$ es $vwx^2 - u^2yz = 0$.
- Su centro está en el punto $(-u^2 : 2vw : 2vw)$, sobre la mediana que pasa por A.
- El discriminante de $\mathcal{L}_{BC}$ es $\frac{1}{4}u^2(u^2 - 4vw)$. La cónica $\mathcal{P}_a$ de ecuación $x^2 - 4yz = 0$ es una parábola que pasa por B y C y que es tangente a la paralela media a BC en su punto medio. Aquí mostramos una construcción por cinco puntos de la parábola $\mathcal{P}_a$: Sean $A'B'C'$ el triángulo medial de ABC, D el punto que dividen BC en las razón $BD : DC = 1 : 4$ y E el punto que divide BC en la razón $BE : EC = 4 : 1$. Entonces los puntos $BB' \cap AE$ y $CC' \cap AD$ están sobre $\mathcal{P}_a$.

- Cuando P está sobre $\mathcal{P}_a$, la cónica $\mathcal{L}_{BC}$, que es una parábola, coincide con $\mathcal{P}_a$.

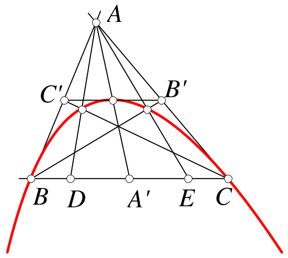

FIG. 17: Construcción de $\mathcal{P}_a$.

10. La homografía $h_{CP} : ABW \to CVA$

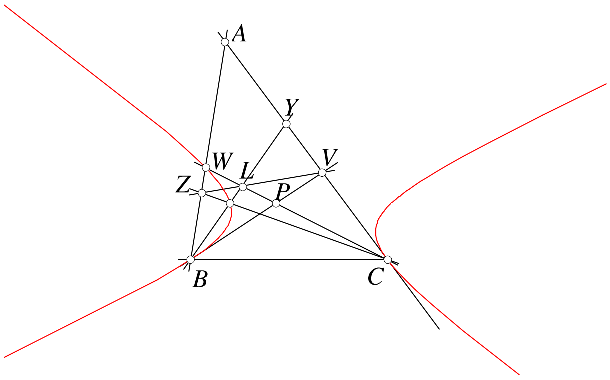

FIG. 18: La homografía h_{CP}.

I La homografía h_{CP} que transforma A en C y que tiene a la recta CP como eje de homografía también transforma B en V y W en A.

II El eje de homografía es, por construcción, la recta CP.

III El centro de la homografía h^*_{CP} es el punto V.

IV Como $h^*_{CP}(CB) = BA$, la homografía h_{CP} no es una proyección.

V La cónica $\mathcal{L}_{CP}$ pasa por B y C, siendo VB y VC las tangentes en B y C. La cónica $\mathcal{L}_{CP}$ también pasa por W, ya que $h_{CP}(CW) = BA$. El discriminante de $\mathcal{L}_{CP}$ es $\frac{1}{4}u^2(u^2 + +w^2 + 2uw + 4vw)$.

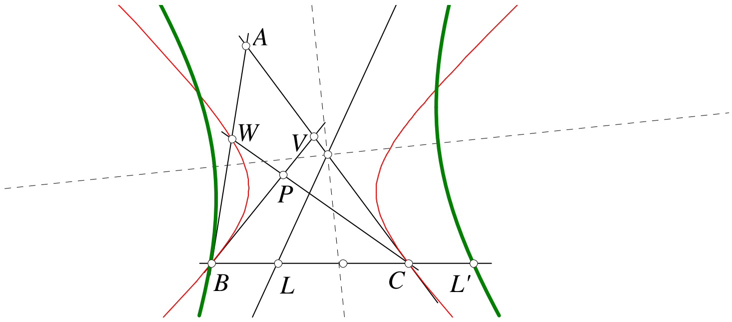

FIG. 19: El discriminante de $\mathcal{L}$.

VI Sobre la cónica $x^2 + 2xz + z^2 + 4yz = 0$:

- Es una hipérbola que pasa por B tangente a la recta AB.
- Su centro es el punto medio de CA.
- Una asíntota es el lado CA. La otra asíntota corta a BC en el punto L tal que $BL : LC = 1 : 2$.
- Vuelve a cortar a BC en L' tal que $BC : CL' = 3 : 1$, es decir tal que $CL' = BL$.

11. La homografía $h_{BP} : ABW \to VAC$

I Sea $h_{BP} : AB \to AC$ la homografía que transforma A, B, W en V, A, C, respectivamente. Como $h_{BP}(A) \neq A$, la homografía no es una proyección.

II Usando los pares de puntos homólogos (B, A) y (W, C), el eje de homografía de h_{BP} pasa por el punto $BC \cap WA = B$, y usando los pares (A, V) y (W, C), el eje debe pasar por el punto $AC \cap WV = V$, por lo que el eje de homografía de h_{BP} es BP.

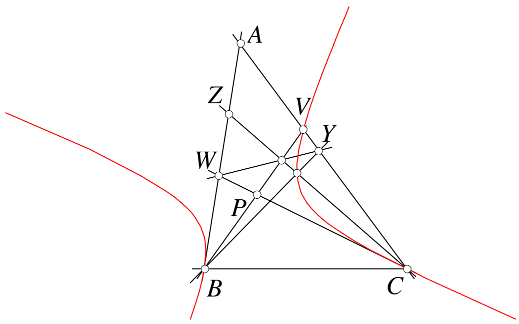

Fig. 20: La homografía h_{BP}.

III Como $h^*_{BP}(CB) = BA \neq BC$, la homografía h^*_{BP} no es una proyección.

IV Usando los pares de rectas homólogas (CA, BV) y (CB, BA), el centro de la homografía h^*_{BP} debe estar situado sobre la recta $(CA \cap BA)(CB \cap BV) = AB$, y usando los pares (CA, BV) y (CW, BC), también debe estar sobre $(CA \cap BC)(CW \cap BV) = CP$, por lo que el centro es el punto $AB \cap CP = W$.

V Al no ser h^*_{BP} una proyección, el lugar $\mathcal{L}_{BP}$ de los puntos de la forma $m \cap h^*_{BP}(m)$ es una cónica que pasa por B y C, siendo las tangentes en B y C las rectas BW y $CW = CP$. Teniendo en cuenta que $h^*_{BP}(CA) = BV$, el punto $CA \cap BV = V$ también está sobre $\mathcal{L}_{BP}$.

12. La homografía $h_{VW} : ABW \to VCA$

I Sea h_{VW} la homografía que transforma A, B, W en V, C, A, respectivamente. Como $h_{VW}(A) \neq A$, la homografía no es una proyección.

II El eje de homografía es la recta VW. En efecto, usando los pares (B, C) y (W, A), el eje de homografía pasa por $BA \cap CW = W$, y usando los pares (A, V) y (B, C), el eje también debe pasar por $AC \cap VB = V$.

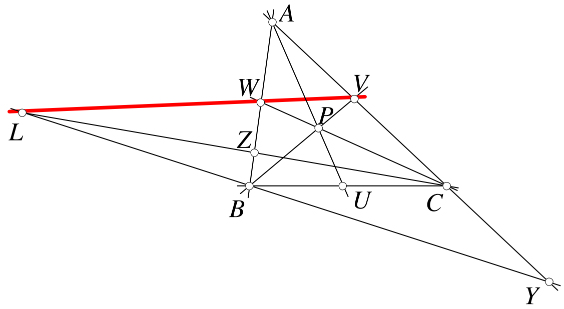

FIG. 21: La homografía h_{VW}.

III Usando los pares de rectas homólogas (CA, BV), (CB, BC), (CW, BA) de la homografía h^*_{VW}, el centro de la homografía h^*_{VW} es el punto $U = AP \cap BC$.
IV Como $h^*_{VW}(CB) = BC$, la homografía h^*_{VW} es una proyección.
V En este caso $\mathcal{L}_{VW}$ es una recta, la recta VW.

13. Praxis

Proponemos practicar lo aprendido aquí estudiando las homografías entre las rectas AP y BC que transforman los puntos AUP en una permutación de los puntos BCU.

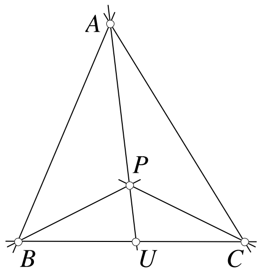

FIG. 22: Otras seis homografías.

Referencias

[1] José María Pedret: *Curso de Geometría Proyectiva para un amigo*. Disponible en `http://garciacapitan.esy.es/pedret`
[2] Jean Claude Sidler: *Géométrie Projective*. Dunod, 2000.