Una nueva demostración de la desigualdad de Euler $R \geq 2r$

por *D.M. Bătinețu-Giurgiu*, Bucharest, Romania
y
***Neculai Stanciu*, Buzău, Romania**

Sea ABC un triángulo con ángulos A, B, C en radianes, R circumradio e inradio r.

Consideramos la función $f:(0,\pi) \to R$, $f(x) = \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) - \ln x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}ctg\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\,,\; f''(x) = -\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{x^2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Ya que $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, $\forall x \in (0,\pi)$ resulta $f''(x) < 0$, y f es cóncava en $(0,\pi)$.

De la desigualdad de *Jensen* deducimos que

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{ABC}\right) \leq \ln\left(\frac{3}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ABC \geq \frac{8\pi^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{27}.$$

Usando $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ obtenemos $ABC \geq \frac{2\pi^3 r}{27R}$.

De aquí, $\pi = A + B + C \geq 3\cdot\sqrt[3]{ABC} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2\pi^3 r}{27R}} = \pi\sqrt[3]{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow R \geq 2r$,

i.e. la drsigualdad de *Euler*, $R \geq 2r$.