MÁXIMOS SIN DERIVADAS

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN

Resumen. Este artículo reune varios ejemplos de cómo calcular extremos sin necesidad de usar el cálculo diferencial. Solo usaremos conocidas desigualdades entre las medias geométrica, aritmética y cuadrática.

1. Desigualdades entre medias

Dados tres números positivos x, y, z definimos su medias geométrica G, su media aritmética M y su media cuadrática Q como

$$G = \sqrt[3]{xyz}, \qquad M = \frac{x+y+z}{3}, \qquad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Probaremos que siempre es $G \leqslant M \leqslant Q$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$. Lo mismo es cierto para cualquier número de variables, pero aquí nos centramos en el caso de tres números x, y, z.

2. La desigualdad $G \leqslant M$

Para demostrar que $G \leqslant M$ demostramos primero la versión para el caso de dos números, es decir:

Proposición 1. *Si $x, y \geqslant 0$ se cumple $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ y la igualdad es cierta si y solo si $x = y$.*

Demostración. Es inmediato de la desigualdad

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2} \geqslant 0.$$

Ahora demostramos la versión para cuatro números.

Proposición 2. *Si $x, y, z, t \geqslant 0$ se cumple $\sqrt[4]{xyzt} \leqslant \frac{x+y+z+t}{4}$.*

Demostración. Usamos dos veces la versión para dos números,

$$\sqrt[4]{xyzt} = \sqrt{\sqrt{xy}\sqrt{zt}} \leqslant \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zt}}{2} \leqslant \frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+t}{2}}{2} = \frac{x+y+z+t}{4}.$$

Ahora ya podemos demostrar la versión para tres números.

Proposición 3. *Si $x, y, z \geqslant 0$ se cumple $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$.*

Demostración. Dados $x, y, z \geqslant 0$, aplicando la Proposición 2,

$$\sqrt[4]{xyzM} \leqslant \frac{x+y+z+M}{4} \Rightarrow \sqrt[4]{G^3M} \leqslant \frac{3M+M}{4} = M$$
$$\Rightarrow G^3M \leqslant M^4 \Rightarrow G \leqslant M.$$

Proposición 4. *Se cumple que $G \leqslant M$ y la iguladad es cierta si y solo si $x = y = z$.*

3. La desigualdad $M \leqslant Q$

Es posible dar una demostración directa de esta desigualdad:

Proposición 5. *Si $x, y, z \geqslant 0$ entonces $\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$.*

Demostración. Evidentemente tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2) \\
&\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-(x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$.

4. Los problemas

Vamos a usar las desigualdades entre las medias para resolver algunos problemas de optimización:

1. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.
2. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un octaedro regular de arista a.
3. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un tetraedro regular de arista a.
4. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una esfera de radio R.
5. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una octaedro regular de arista a.

5. Las soluciones

Problema 1. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.*

Solución. Llamando r al radio de la base del cilindro y h a su altura, debemos maximizar $V = \pi r^2 h$ cumpliéndose que $(\frac{h}{2})^2 + r^2 = R^2$. En lugar de usar el cálculo diferencial, usaremos la desigualdad entre la media geométrica y la media cuadrática, a saber,

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Leftrightarrow xyz \leqslant \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{3/2},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$. Entonces

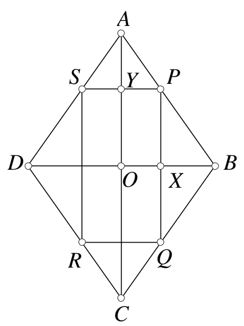
$$V = \pi r^2 h = 4\pi \frac{r}{\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{2}} \frac{h}{2} \leqslant 4\pi \left(\frac{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{4}}{3} \right)^{3/2}$$
$$= 4\pi \left(\frac{R^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$$

cumpliéndose la igualdad cuando $h = \sqrt{2} r$ y

$$\pi r^2 \cdot \sqrt{2} r = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3 \Rightarrow r^3 = \frac{4}{3\sqrt{6}} R^3 = \frac{8}{6\sqrt{6}} R^3 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{6}} R, h = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$

Problema 2. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un octaedro regular de arista a.*

Solución. En la figura de la derecha $ABCD$ y $PQRS$ son las secciones del octaedro y el cilindro respectivamente con $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, $PQ = h$ y $QR = 2r$. Por tanto, $OA = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ y, usando los triángulos semejantes PXB y OAB, obtenemos $\frac{\frac{h}{2}}{\frac{a}{2} - r} = \sqrt{2}$, de donde resulta la relación $r + \frac{h}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$ (1). La misma relación puede obtenerse usando la ecuación segmentaria de la recta AB con $A = (0, \frac{\sqrt{2}a}{2})$ y $B = (\frac{a}{2}, 0)$ sobre la que está el punto $P = (r, \frac{h}{2})$.



Tenemos que maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$ cuando se cumple (1).

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, es decir, la desigualdad $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$, tenemos

$$V = 8\sqrt{2}\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{h}{2\sqrt{2}} \leqslant 8\sqrt{2}\pi \cdot \left(\frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}}}{3} \right)^3 = 8\sqrt{2}\pi \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{27},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $h = \sqrt{2} r$ y

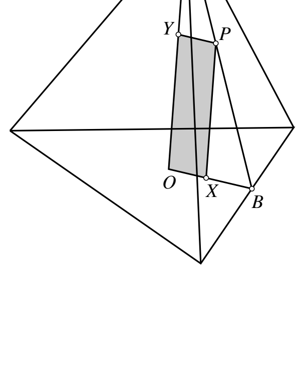
$$\pi r^2 \cdot \sqrt{2} r = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{27} \Leftrightarrow r = \frac{a}{3}, h = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Problema 3. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un tetraedro regular de arista a.*

Solución. En la figura de la derecha O es el centro de una de las caras del tetraedro y AB es la altura de otra cara.

El cuadrilátero $PXOY$ representa la sección de medio cilindro inscrito en el tetraedro, donde $PX = h$, $PY = r$, $AB = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $OB = \frac{\sqrt{3}a}{6}$. Entonces,

$$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$



El radio r y la altura h del cilindro inscrito deben cumplir la relación

$$\frac{r}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}+\frac{h}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}=1 \Leftrightarrow r+\frac{h}{2\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

El volumen del cilindro inscrito es por tanto

$$V=\pi r^2 h=8\sqrt{2}\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{h}{2\sqrt{2}}\leqslant 8\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+\frac{h}{2\sqrt{2}}}{3}\right)^3$$

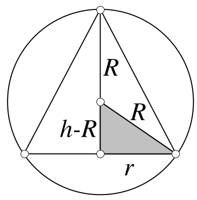
$$=8\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{18}\right)^3=\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{243},$$

cumpliéndose la igualdad cuando $h=\sqrt{2}r$ y

$$\pi r^2\cdot\sqrt{2}r=\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{243}\Rightarrow r=\frac{a}{3\sqrt{3}}, h=\frac{\sqrt{6}a}{9}.$$

Problema 4. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una esfera de radio R.*

Solución. En primer lugar, usamos el teorema de Pitágoras para obtener la relación $(h-R)^2+r^2=R^2$, o bien, $r^2=2Rh-h^2$.



Entonces, buscamos hacer máxima la expresión $V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)$.

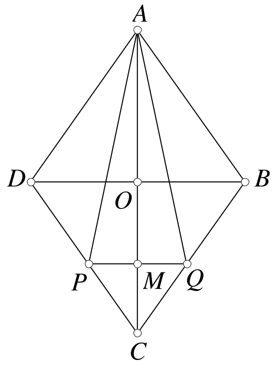
Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$V=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h)\leqslant\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2R}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81},$$

cumpliéndose la igualdad cuando $h=\frac{4R}{3}$ y $r^2=\frac{8}{9}R^2\Rightarrow r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Problema 5. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una octaedro regular de arista a.*



Solución. En la figura de la derecha $ABCD$ y APQ son las secciones del octaedro y el cono respectivamente, y O y M los puntos medios de PQ y DB, cumpliéndose que $OB = \frac{a}{2}$, AB es la altura de una de las caras del octaedro, por tanto, $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, y por último, $MQ = r$ y $AM = h$ son el radio de la base y la altura del cono.

En consecuencia, tenemos $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Usando los triángulos semejantes CMQ y COB tenemos la relación

$$\frac{CM}{MQ} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}a - h}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2},$$

es decir $h = \sqrt{2}(a - r)$. El volumen del cono es

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\sqrt{2}r^2(a-r)}{3} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(a-r) \leqslant \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{81},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $a - r = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{2a}{3}, h = \frac{\sqrt{2}a}{3}$.