Una nueva demostración sencilla de la desigualdad de Blundon

Por *Marius Drăgan*, Bucarest, Rumania
y
***Neculai Stanciu*, Buzău, Rumania**

Sea ABC un triángulo con longitudes de los lados a, b y c, semiperímetro p, circumradio R e inradio r.

La desigualdad de *Blundon* (véase W.J. Blundon - *Inequalities associated with the triangle*, Can. Math. Bull **8** (1965), pp. 615-626) es

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3} \le p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}, \quad \text{(B)}.$$

.Sea *x>0.*

Llamamos $y = \dfrac{tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2}}x$, $z = \dfrac{tg\frac{C}{2}}{tg\frac{A}{2}}x$. Usando la formula

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1, \text{ tenemos } xy + yz + zx = \frac{x^2}{\tan^2\frac{A}{2}}, \text{ luego}$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{x}{\sqrt{\sum_{cyc} xy}}, tg\frac{B}{2} = \frac{y}{\sqrt{\sum_{cyc} xy}}, \ tg\frac{C}{2} = \frac{z}{\sqrt{\sum_{cyc} xy}}.$$

Sean $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz, \ t = \sqrt{\sigma_2}$.

Mediante $\sum_{ciclic} tg\frac{A}{2} = \frac{4R + r}{p}$, $\prod_{ciclic} tg\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$, deducimos

$$\sigma_1 = t\sum_{ciclic} tg\frac{A}{2} = \frac{t(4R + r)}{p}, \ \sigma_2 = t^2, \ \sigma_3 = t^3 \cdot \frac{r}{p}.$$

Por lo tanto, x, y y z son las raícess de la ecuación $u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0$.

Por *Cardano-Tartaglia* (ver G. Stoica, *Asupra unui tip de inegalități*, Romanian Mathematical Gazette, no. 1, 2016, pp. 7-9) se tiene $18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2 \ge 0$.

Entonces obtenemos $(p^2)^2 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 \le 0$ ($\Delta = 16R(R-2r)^3$)

$\Leftrightarrow \left| p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2 \right| \leq 2\sqrt{R(R-2r)^3}$, i.e. (B), y la demostración termina.