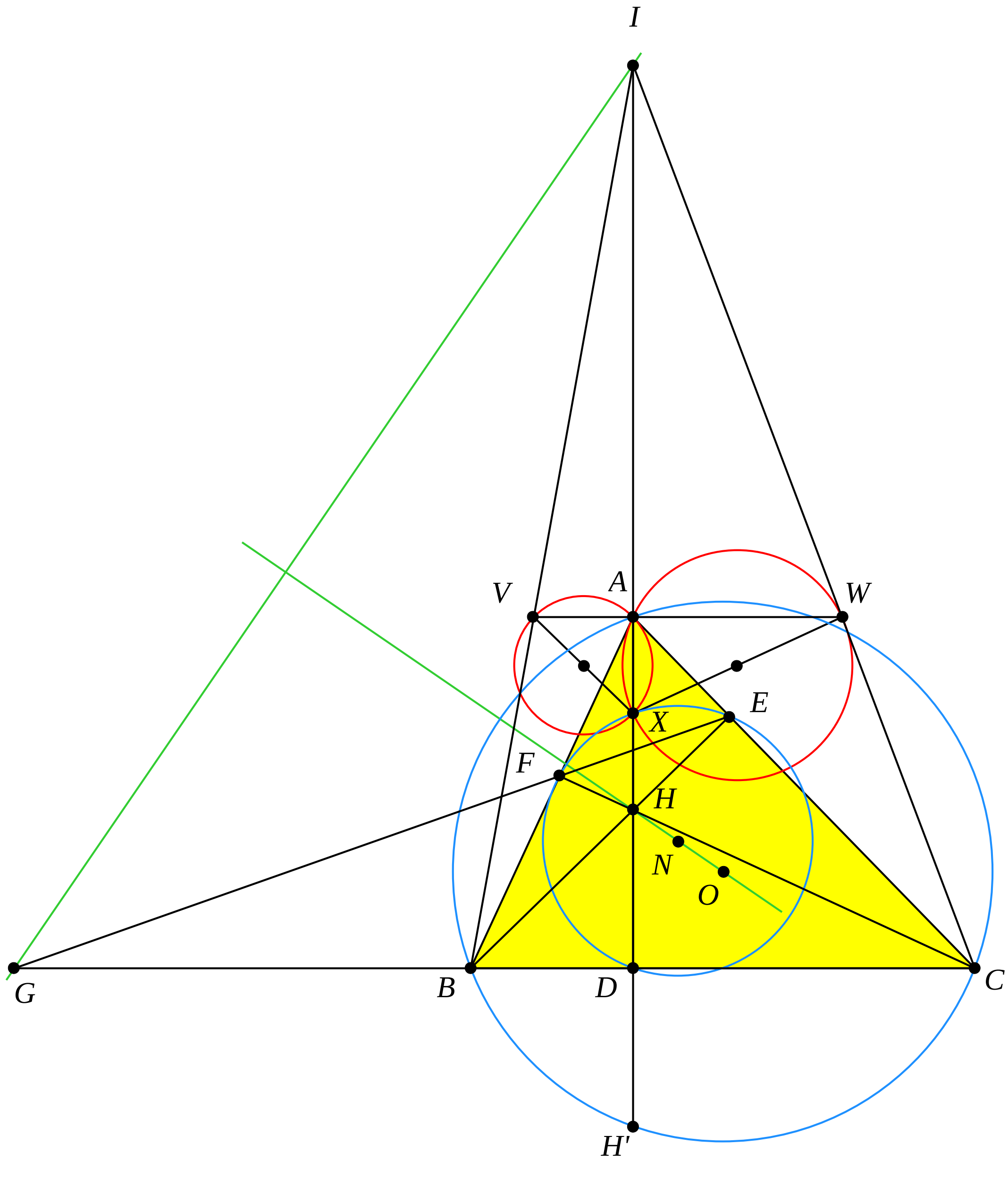
**Problem 291.** *$ABC$ es un triángulo acutángulo con circuncentro $O$ y ortocentro $H$. El punto medio de $AH$ es $X$. Sean $E$ y $F$ los pies de las alturas desde $B$ y $C$, respectivamente. $XV$ es un diámetro de una circunferencia que pasa por $A$ y $X$, y es tangente a la recta $AC$. Una segunda circunferencia que pasa por $A$ y $X$ y es tangente a la recta $AB$, tiene a $XW$ como diámetro. Suponiendo que se pueden construir los puntos $G = EF \cap BC$, $I = BV \cap CW$, demostrar que las rectas $GI$ y $OH$ son perpendiculares.*

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España

*Solución de Ercole Suppa.* Sea $D$ el pie de la altura trazada desde $A$ sobre $BC$, sea $H'$ el punto de intersección (distinto de $A$) de la recta $AH$ con la circunferencia circunscrita $(O)$ y sea $N$ el punto medio de $OH$, como se indica en la figura.




Recordamos en primer lugar dos resultados clásicos

- $N$ es el centro de la circunferencia de los nueve puntos que pasa por $D$, $E$, $F$;
- el punto $H'$ es el simétrico de $H$ respecto a $BC$.

Volviendo al problema, para probar que $GI$ y $OH$ son perpendiculares nos basta demostrar que $GI$ es el eje radical de $(O)$ y $(N)$: de hecho, se sigue que $GI \perp ON$ y por lo tanto $GI \perp OH$, dado que $O$, $N$, $H$ están alineados.

**Proposición 1.** El punto $G$ tiene la misma potencia respecto de las circunferencias $(O)$ y $(N)$.

De hecho, en el cuadrilátero cíclico $BCEF$ tenemos:

$$GB \cdot GC = GF \cdot GE$$

**Proposición 2.** El punto $I$ tiene la misma potencia respecto de las circunferencias $(O)$ y $(N)$.

Si denotamos los ángulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ respectivamente con $\beta$ y $\gamma$ tenemos

$$\angle BHC = \angle BHD + \angle DHC = \gamma + \beta$$

Además, dado que $AC$ es tangente a $\odot(AVX)$ y $AB$ es tangente a $\odot(AXW)$, también tenemos

$$\begin{aligned}
&\angle XVW = \angle XVA = \angle XAC = 90^\circ - \gamma = \angle HBC \\
&\angle XWV = \angle XWA = \angle XAB = 90^\circ - \beta = \angle HCB \\
&\angle VXW = 180^\circ - \angle XVA - \angle XWA = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta + \gamma = \angle BHC
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que los triángulos $\triangle XVW$ y $\triangle HBC$ son semejantes.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $VW \parallel BC$ e $\triangle XVW \sim \triangle HBC$, tenemos:

$$\begin{gathered}
\frac{AX}{HD} = \frac{VA}{BD} = \frac{IA}{ID} \quad \Rightarrow \\
AX \cdot ID = IA \cdot HD = IA \cdot DH' \quad \Rightarrow \\
AX \cdot ID + IA \cdot ID = IA \cdot DH' + IA \cdot ID \quad \Rightarrow \\
ID \cdot (IA + AX) = IA \cdot (ID + DH') \quad \Rightarrow \\
IX \cdot ID = IA \cdot IH'
\end{gathered}$$

entonces el punto $I$ tiene la misma potencia respecto de $(N)$ y $(O)$.

Como $G$ y $I$ tienen la misma potencia respecto de $(N)$ y $(O)$, se deduce que $IG$ es el eje radical de $(N)$ y $(O)$ y así hemos terminado. $\square$