Problema 292, propuesto por Leonard Giugiuc, Rumania.

Resolver en el siguiente sistema en R^4:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ab+bc+cd+da+ac+bd=6} \\ \boldsymbol{abc+abd+acd+bcd=2\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{a+b+c+d=\sqrt{2}(3+abcd)} \end{cases}$$

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

En primer lugar, observamos que las soluciones reales del sistema se corresponderán con las soluciones reales de la ecuación $q(x)=0 \to q(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Desarrollamos esta ecuación, $q(x)=0$:

$$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd=0 \quad (I)$$

Sustituyendo las expresiones literales por sus valores, obtenemos:

$$x^4-\sqrt{2}(3+abcd)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+abcd=0$$

Si llamamos $p=abcd$, la ecuación se podrá expresar como: $x^4-\sqrt{2}(3+p)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+p=0$

En definitiva, $q(x)=x^4-\sqrt{2}(3+p)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+p$.

Consideramos las siguientes funciones reales de variable real:

$f(x)=x^4+6x^2-2\sqrt{2}\,x;\ \ g(x)=\sqrt{2}(3+p)x^3-p\,. \qquad p\in R$

Observamos que $q(x)=0 \leftrightarrow f(x)=g(x)$. Estudiamos ambas funciones.

$f(x)=x^4+6x^2-2\sqrt{2}\,x \to f'(x)=4x^3+12x-2\sqrt{2} \to f''(x)=12x^2+12>0$

Por tanto, la función $y=f(x)$ es siempre cóncava y no presenta ningún punto de Inflexión.

Como quiera que $f(0)=0\ \ y\ \ f'(0)<0 \to x_1=0$ es una raíz de $f(x)=0$ y además ha de existir una segunda raíz $x_2>0$ tal que $f(x_2)=0$.

Por tanto, $y=f(x)$ alcanzará su mínimo absoluto en su punto mínimo local $M\big(x_m,f(x_m)\big),\ \ siendo\ \ x_1=0<x_m<x_2$.

Sea ahora la función $g(x)=\sqrt{2}(3+p)x^3-p$.

Para el valor de $p=-3 \to g(x)=3$ presenta sólo 2 puntos de corte con la gráfica de $y=f(x)$.

Por tanto, para este valor de p, no pueden existir 4 soluciones reales de la ecuación (I), ya que si así fuera deberían existir entonces 4 puntos de corte entre ambas funciones.

Para los valores de $p\neq -3 \to y=g(x)$ presenta un Punto de Inflexión en $A(0,-p)$.

Por tanto, si $p\neq -3$, las gráficas siempre se cortan en al menos 2 Puntos de corte $B_1\ \ y\ \ B_2$. Sólo cambiaría esta situación cuando alguno de los puntos B_i fuera de contacto con las tangentes correspondientes en ambas funciones. Y si esto ocurriese entonces sí existirían soluciones reales múltiples.

Como quiera que $x=0$ siempre estaría presente, pero como no puede ser múltiple ya que $f'(0)\neq 0$, la única posibilidad sería que $q(x)=x(x-x_2)^3$

Desarrollando esta expresión e igualando coeficientes, obtenemos:

$$q(x)=x(x-x_2)^3=x^4-3x_2x^3+3x_2^2x^2-x_2^3x=x^4-\sqrt{2}(3+p)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+p$$

$$\begin{cases} -3x_2=-\sqrt{2}(3+p) \\ 3x_2^2=6 \\ -x_2^3=-2\sqrt{2} \\ 0=p \end{cases} \to \begin{cases} x_2=\sqrt{2} \\ p=0 \end{cases}$$

Por tanto, solamente en este caso, pueden existir 4 soluciones reales: $\{x_1=0\ (simple) y\ \ x_2=\sqrt{2}\ (triple)\}$.

Por fin, las soluciones del sistema anterior serían:

Casos	a	b	c	d
Sol_1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
Sol_2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
Sol_3	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
Sol_4	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$