Problema 294 *(Propuesto por Marius Dragan y Neculai Stanciu. Rumania)*

Sea ABCD un cuadrilátero bicéntico de inradio r, circumradio R y diagonales p y q

Demostrar que $\frac{R^2}{r^2} \geq \frac{(p^3+q^3)\cdot(p+q)}{2p^2q^2}$

Solución: (propuesta por Joaquim Nadal Vidal. Llagostera . Girona)

Si ABCD es inscribible en una circunferencia de radio R es claro que A+C = B+D = 180º

Considerando los triángulos ABC y ABD inscritos, es conocido que AC = 2R Sen B y BD = 2R Sen A

Tenemos pues p = 2r Sen B y q = 2r Sen A ,

Con esto deberemos probar que $\frac{R^2}{r^2} \geq \frac{(Sen^3A+Sen^3B)\,(Sen\,A+Sen\,B)}{2\,Sen^2A\cdot Sen^2B}$;

Si I es el incentro AI , BI , CI, DI son las bisectrices interiores de A, B, C y D

AB = r (Cotan $\frac{A}{2}$ + Cotan $\frac{B}{2}$) ; BC = r (Cotan $\frac{B}{2}$ + Cotan $\frac{C}{2}$) ; CD = r (Cotan $\frac{C}{2}$ + Cotan $\frac{D}{2}$) ; DA = r (Cotan $\frac{D}{2}$ + Cotan $\frac{A}{2}$)

Siendo A+C = 180, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ ===> Cotan $\frac{C}{2} = Tan\ \frac{A}{2}$; Identicamente Cotan $\frac{D}{2} = Tan\ \frac{B}{2}$ ===>

AB = r (Cotan $\frac{A}{2}$ + Cotan $\frac{B}{2}$) ; BC = r (Cotan $\frac{B}{2}$ + Tan $\frac{A}{2}$) ; CD = r (Tan $\frac{A}{2}$ + Tan $\frac{B}{2}$) ; DA = r (Tan $\frac{B}{2}$ + Cotan $\frac{A}{2}$)

$AC^2 = 4R^2sen^2B = BA^2 + BC^2 - 2\cdot BA\cdot BC\cdot Cos\ B$

$BD^2 = 4R^2sen^2A = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot Cos\ A$

$4R^2sen^2B = r^2\cdot\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right).Cos\ B\right]$

$4R^2sen^2A = r^2\cdot\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right).Cos\ A\right]$

Aislando $\frac{R^2}{r^2}$ de ambas, igualando y operando nos queda

$\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right).Cos\ B\right]\cdot sen^2A =$

$\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right).Cos\ A\right]\cdot sen^2B$

Esta igualdad se verifica en dos casos: cuando A = B y cuando A+B = 180

En el segundo caso $\frac{A}{2}+\frac{B}{2} = 90$ *y por tanto* Cotan $\frac{A}{2} = Tan\ \frac{B}{2}$ y Cotan $\frac{B}{2}$ = Tan $\frac{A}{2}$

Tanto si A y B son iguales como si son suplementarios se obtiene con facilidad al operar que $\frac{R^2}{r^2} = \frac{1+Sen^2A}{Sen^4A}$

Con esto la desigualdad del enunciado quedaría así:

Probar que $\frac{1+Sen^2A}{Sen^4A} \geq \frac{2\,Sen^3A\cdot 2\,Sen\,A}{2\,Sen^4A}$ es decir **probar que** $\boldsymbol{\frac{1+Sen^2A}{Sen^4A} \geq 2}$

Para ello veremos que $1 + Sen^2A - 2\,Sen^4A \geq 0$; si Sen A = x ∈ $[0,1]$ tenemos la función

F(x) = 1 + x^2- $2x^4$ ===> F'(x) = 2x -8x^3 = 0 ===> x = 0 y x = $\frac{1}{2}$

De 0 a ½ F crece y de ½ a 1 F decrece ; siendo F(0) = 1 ; F(1/2) = 9/8 y F(1) = 0

Tenemos que F(x) ≥ 0 y así terminamos