Problemas propuestos 296-300

Problema 296 (propuesto por D.M.Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, Rumania).

Sean $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a \in \mathbb{R}, b, c, d, m, p \in \mathbb{R}_+^*, k = \overline{1,n}, X_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} x_k^m$, $X_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} x_k^p$, tal que $c \cdot X_{n,p} > d \cdot \max_{1 \le k \le n} x_k^p$.

Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{a \cdot X_{n,m} + b \cdot x_k^m}{c \cdot X_{n,p} - d \cdot x_k^p} \ge \frac{n \cdot (an+b)}{cn-d} \cdot \frac{X_{n,m}}{X_{n,p}}$.

Problema 297 (propuesto por Florin Stanescu, Gaesti, Rumania).

Sean *a,b,c* números complejos distintos, de módulo 1, tales que

$$|a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2 > 8 .$$

Demostrar que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\prod_{cicl} \left(\frac{\sqrt{\left(2 + \left|a^2 + bc\right|\right)}}{|(a+b)|} \right) \ge 8 \cdot \left(\sum_{cicl} \frac{1}{|(a-b)(b-c)|} \right).$$

Problema 298 (Propuesto por Pedro H.O. Pantoja, Natal, Brasil)

Calcular

$$\int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{1+\tan x}{\cos^4 x - \sin^4 x} \right) dx .$$

Problema 299 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

i) Se considera la función afín *f*, determinada por los puntos M(0,4) y N(2,k). Si x_A es el punto de intersección de la gráfica de *f* con el eje Ox, hallar $k \in \mathbb{R}$ de manera que *f* pueda ser una función de densidad de una variable aleatoria *x*, en el intervalo $[0, x_A]$.

ii) Calcular la probabilidad $p = P\Big((x \ge 1/8)\Big|\big(|x| < 1/4\big)\Big)$.

iii) Escribir en orden creciente: *p,* la probabilidad de obtener la suma 8 cuando se lanzan 2 dados, y, respectivamente, la probabilidad de disponer 3 libros en 3 estantes, de modo que 2 de ellos estén en el primer estante.

Problema 300 (propuesto por el editor)

OAB y OCD son dod rectas que se cortan. Las circunferencias (OAC) y (OBD) se cortan nuevamente en P, y las circunferencias (OBC) y (OAD) se cortan nuevamente en Q. La circunferencia (OPQ) corta a la recta OAB en otro punto R, y a la recta (OCD) en S.

Demostrar que R es el punto medio de AB y S el punto medio de CD.