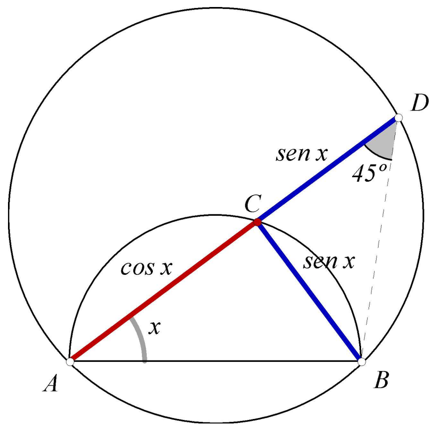
CÁLCULO DE EXTREMOS SIN DERIVADAS

Cristóbal Sánchez-Rubio García

Siguiendo la línea del artículo de Francisco Javier García Capitán del número 58 propongo 6 ejemplos de cálculo de extremos usando solamente recursos de geometría elemental

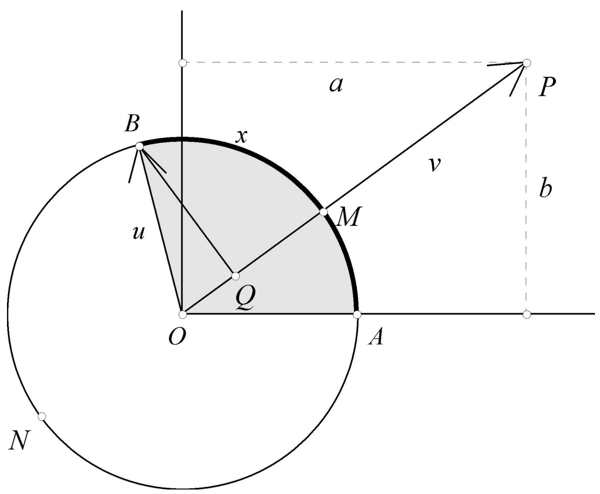
1.- Hallar el máximo de sen x + cos x en el primer cuadrante
Tomando un punto C sobre una semicircunferencia de diámetro $AB = 1$. La figura es muy clara, $\operatorname{sen} x + \cos x = AD$. D está en el arco capaz de 45º sobre AB.
El máximo se alcanza cuando la cuerda AD es un diámetro, entonces $x = 45^{\circ}$ y el valor máximo es $\sqrt{2}$.



2.- Extremos de $f(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x$ para a, b reales cualesquiera.
Si B recorre el círculo unidad de modo que $\angle AOB = x$, pongamos

$$\vec{u} = (\cos x, \operatorname{sen} x), \vec{v} = (a, b)$$

Usando el producto escalar



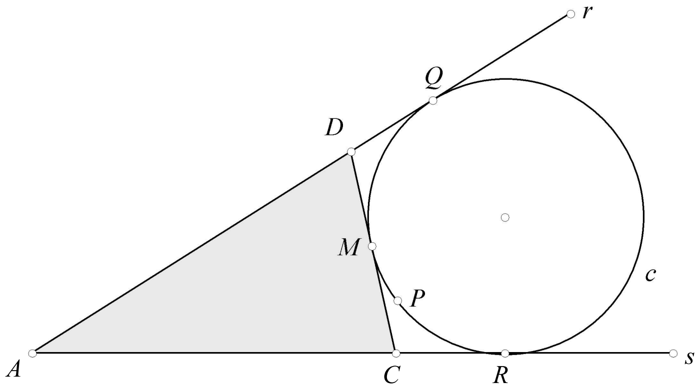
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cos x + b\operatorname{sen} x = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi = OP\cdot OQ$$

Siendo $\varphi = \angle BOQ$. (Los segmentos OP y OQ son orientados).

Como OP es fijo, el máximo se alcanza cuando B está en M y vale $\sqrt{a^2+b^2}$ y el ángulo del máximo cumple $\tan x = \dfrac{b}{a}$. Para el mínimo, B ha de estar en N. El valor de x es el anterior más 180º y el mínimo vale $-\sqrt{a^2+b^2}$.

3.- Dos rectas r y s secantes se cortan en A. P es un punto que no está en ninguna de las rectas. Trazar una recta que pase por P y determine con r y s un triángulo de perímetro mínimo.

Sea c la circunferencia que pasa por P y es tangente a r y a s en Q y R, Si M es un punto



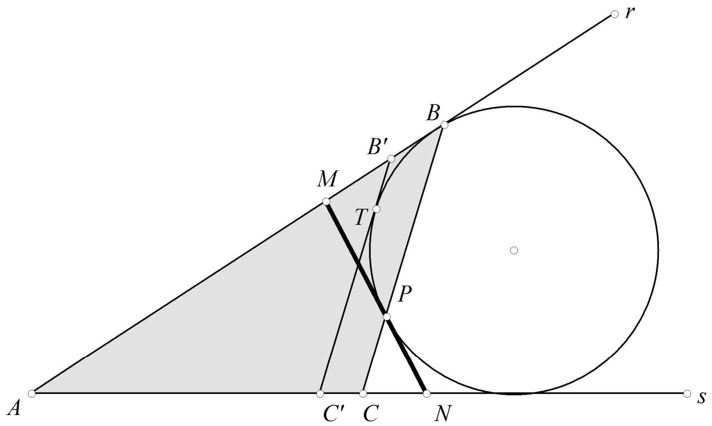
cualquiera del arco QR, las tangentes a c en M determinan triángulos de perímetro constante cuyo valor es $2AQ$.

En efecto,

$$AD + AC + DC = AD + AC + DM + CM = AD + AC + DQ + CR = AQ + AR = 2AQ$$

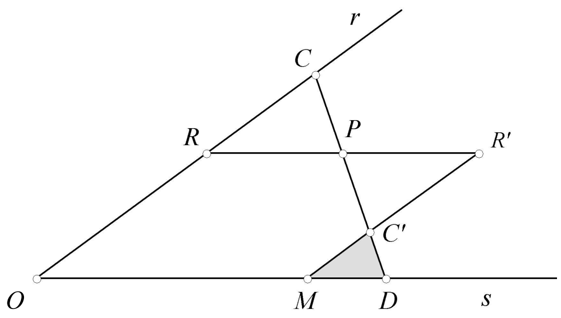
Para una recta cualquiera pasando por P como BC si trazamos la paralela a BC tangente a c en T , obtenemos un triángulo $AB'C'$ de perímetro claramente menor que el perímetro de ABC .

Basta entonces trazar la tangente a c en P para obtener el triángulo de perímetro mínimo.



4.- Dos rectas r y s secantes se cortan en O. P es un punto que no está en ninguna de las rectas. Trazar una recta que pase por P y determine con r y s un triángulo de área mínima.

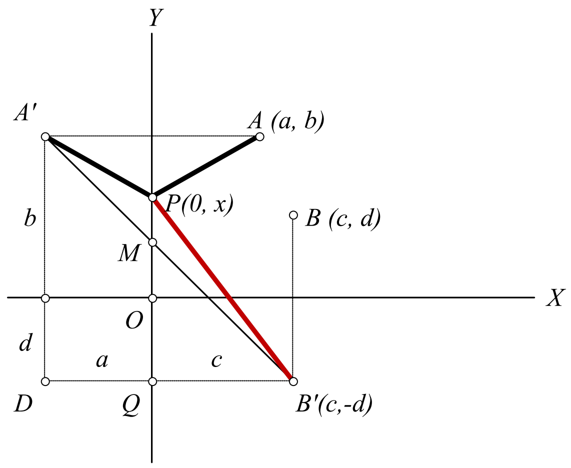
Pondremos como es habitual $[XYZ...]$ para designar el área del polígono de vértices *X,Y,Z,…*
La figura está construida trazando la paralela por *P* a *s* que corta en *R* a *r*. *CD* es una recta cualquiera que pasa por *P*. Girando *C* y *R* 180º con centro en *P* obtenemos *C*' y *R*'. Finalmente *M* es la intersección de *s* con la paralela por *R*' a *r*.
Claramente se tiene



$$[OCD]=[OMR'R]+[MDC']$$

Como el área del paralelogramo *OMRR*' es constante, el mínimo se alcanza cuando el área del triángulo *MDC*' es cero y eso sucede cuando *D* y *C*' coinciden con *M*. La recta *MP* es la buscada.

5.- Hallar el mínimo de $f(x)=\sqrt{a^2+(b-x)^2}+\sqrt{c^2+(d+x)^2}$ siendo *a*, *b,c, d* reales.
Sean $A(a,b),B(c,d)$, *A*' el simétrico de *A* respecto del eje de ordenadas, *B*' el simétrico de *B* respecto del eje de abscisas y finalmente $P(0,x)$ un punto sobre el eje de ordenadas a distancia *x* del origen.
Claramente:

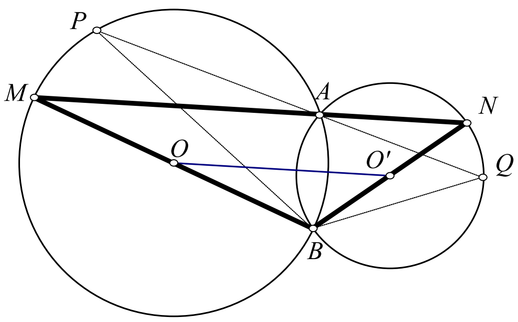


$$AP=A'P=\sqrt{a^2+(b-x)^2},PB'=\sqrt{c^2+(d+x)^2}$$

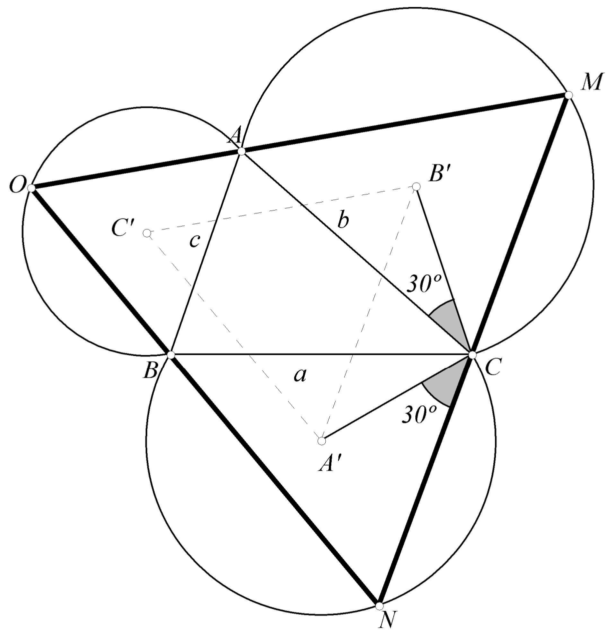
Por tanto, $f(x)=A'P+PB'$ será mínimo cuando *APB*' estén alineados.
El valor del mínimo se obtiene fácilmente por semejanza de las triángulos *A'DB*' y *MQB*'. Si llamamos *m* a la ordenada de *M* resulta

$$\frac{m+d}{c}=\frac{b+d}{a+c}\Rightarrow m=\frac{bc-ad}{a+c}.$$

6.- Circunscribir a un triángulo dado *ABC* un triángulo equilátero de área máxima.
Como el triángulo es equilátero bastará conseguir que el lado tenga longitud máxima.
Esto nos lleva a una cuestión previa:
Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias secantes dadas trazar una recta que determine en ambas circunferencias cuerdas de suma máxima.
Para cualquier posición de la recta *PQ*, los ángulos del triángulo *PBQ* no cambian al estar dos de ellos inscritos en el arco *AB* fijo. Por tanto bastará asegurar que un lado cualquiera tenga longitud máxima. Eso se logra cuando los lados *PB* y *QB* son



diámetros y entonces *PQ* es paralela a la línea que une los centros como muestra la figura en trazo grueso. La longitud de la recta que determina cuerdas de suma máximas es el doble de la distancia entre los centros de las circunferencias.
Ya podemos abordar el problema enunciado.
Es obvio que cada vértice ha de estar en el arco capaz de 60º construido sobre cada lado hacia el exterior.
Por tanto basta construir los tres arcos capaces y trazar por cada vértice la paralela a los centros de los arcos de los otros dos. Sus intersecciones con esos arcos nos darán los vértices del triángulo equilátero buscado.
Para hallar el área máxima en función de los datos del triángulo *ABC*,



tenemos claramente,

$$CA' = \frac{\sqrt{3}}{3}a, CB' = \frac{\sqrt{3}}{3}b$$

Además, los ángulos sombreados valen 30º, aplicando el teorema del coseno al triángulo *B'CA'*, resulta

$$A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(60^\circ + C\right)}{3}$$

Finalmente,

$$\left[NMO\right] = 4\left[A'B'C'\right] = 4\frac{\sqrt{3}}{4}A'B'^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(60^\circ + C\right)\right)$$

Además hemos probado que la expresión

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(60^\circ + C\right)$$

es invariante para permutaciones cíclicas del los vértices.