Problemas para los más jóvenes 59

Cinco problemas de pasadas Olimpiadas Balcánicas junior

Problema MJ59-1 (Propuesto por Albania)

Hallar todos los pares (x,y) de enteros positivos tales que $x^y = y^{x-y}$

Problema MJ59-2 (Propuesto por Grecia)

En el triángulo ABC los lados AC y AB son iguales. Sea D un punto del lado BC tal que BC>BD>DC>0. Se consideran las circunferencias k_1 y k_2 circunscritas respectivamente a los triángulos ABD y ADC. Sea M el punto medio de B'C', donde BB' y CC' son diámetros de k_1 y k_2 , respectivamente.

Probar que el área del triángulo MBC no depende de la posición del punto D.

Problema MJ59-3 (propuesto por Yugoslavia)

Un polígono convexo de 1415 lados tiene un perímetro de 2001 cm. Probar que existen tres vértices de este polígono que forman un triángulo cuya área es menor que 1 cm^2.

Problema MJ59-4 (Propuesto por Chipre)

Sean *a,b,c,x,y* números reales tales que

$$a^3+ax+y=0,\ b^3+bx+y=0,\ c^3+cx+y=0.$$

Probar que si *a, b y c* son números reales distintos y no nulos, entonces

$$a+b+c=0.$$

Problema MJ59-5 (Propuesto por Bulgaria)

Nueve puntos están dentro de un cuadrado unidad. Probar que tres de ellos son los vértices de un triángulo cuya área es mayor que 1/8.