Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 59

Problemas de la Olimpiada Asia-Pacífico 2016

Problema APMO2016-1

Se dice que el triángulo ABC es *grande* si se cumple la siguiente condición: Para cualquier punto D en el lado BC, si P y Q son los pies de las perpendiculares desde D a las rectas AB y AC, respectivamente, entonces el simétrico de D respecto de la recta PQ está en el circuncírculo del triángulo ABC.

Probar que el triángulo ABC es grande si y sólo si el ángulo A es de 90º y AB = AC.

Problema APMO2016-2

Un entero positivo es *bonito* si puede expresarse en la forma

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_{100}},$$

donde $a_1, a_2,\ldots,a_{100}$ son enteros no negativos no necesariamente distintos.

Hallar el menor entero positivo n tal que ninguno de sus múltiplos es un número *bonito.*

Problema APMO2016-3

Sean AB y AC dos semirrectas distintas que no están en la misma recta, y sea ω una circunferencia de centro O que es tangente a la semirrecta AC en el punto E y a la semirrecta AB en F. Sea R un punto del segmento EF. La recta por O paralela a EF corta a la recta AB en P. Sea N la intersección de las rectas PR y AC, y sea M la intersección de la recta AB con la recta por R paralela a AC.

Demostrar que la recta MN es tangente a ω.

Problema APMO2016-4

El país Encantado tiene 2016 ciudades. La compañía aérea Starways quiere establecer algunos vuelos de un solo sentido entre pares de ciudades, de tal manera que cada ciudad tenga exactamente un vuelo que despegue de su aeropuerto. Hallar el menor entero positivo k tal que, independientemenet de cómo Starways establezca sus vuelos, las ciudades pueden siempre dividirse en k grupos de modo que desde cualquier ciudad no sea posible llegar a otra ciudad del mismo grupo tomando a lo sumo 28 vuelos.

Problema APMO2016-5

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tales que

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x),$$

cualesquiera que sean los números reales positivos x,y,z.