LA CUCHILLA DEL ZAPATERO ($\alpha\rho\beta\varepsilon\lambda\omega\sigma$)

Lección de preparación olímpica

Francisco Bellot Rosado

El triángulo curvilíneo formado por tres semicircunferencias mutuamente tangentes, con sus centros alineados sobre la misma recta era conocida entre los antiguos griegos como ”árbelos”, que significa ”cuchilla de zapatero”, por su similitud con la que utilizan esos profesionales para cortar cuero. Según parece, fué Arquímedes el que primero la estudió, y posteriormente, fué también tratada por Pappus, Vieta, Descartes, Fermat, Newton , Steiner y McKay, y ya en el siglo XX, por (¡cómo no!) Victor Thébault, Leon Bankoff (el dentista de California), Clayton W. Dodge, Thomas Schoch, Peter Y. Woo y Paul Yiu (estos dos últimos son los editores de una excelente revista virtual de Geometría, *Forum Geometricorum*).

Consideremos un segmento AB, y sea C un punto cualquiera de su interior. Trazando, en un mismo semiplano, los semicírculos de diámetros AB, AC y CB se obtiene el árbelos :

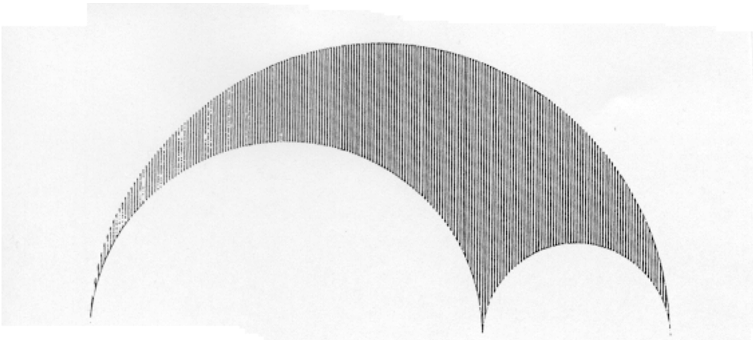


FIGURE 1
The arbelos.

Nos proponemos enumerar y demostrar algunas de las numerosísimas propiedades relacionadas con esta configuración ; se procurará utilizar únicamente herramientas matemáticas al alcance de los estudiantes de Bachillerato o de Olimpiadas; para mayor profundización se puede consultar la Bibliografía.

Se pueden encontrar en Internet páginas dedicadas al árbelos :

http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbelos.htm

aunque las bellas imágenes animadas que en ella se incluyen no pueden imprimirse, lamentablemente.

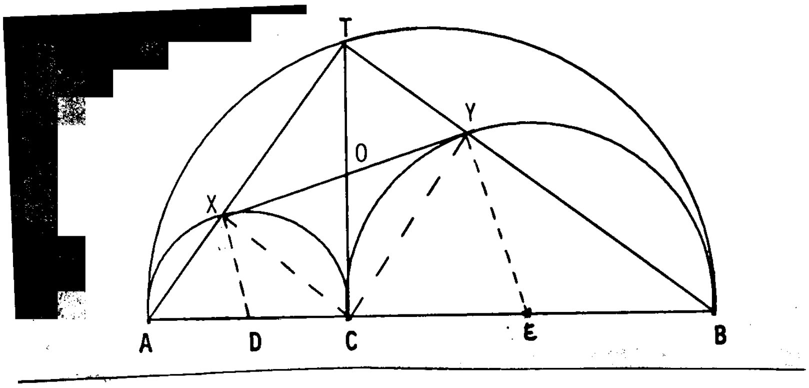
Quien no tema visitar una página en holandés puede ver

http://www.pandd.demon.nl/arbelos.htm,

donde están demostradas muchas propiedades de esta configuración.

Primeras propiedades del árbelos

Levantemos por C una perpendicular a AB hasta que corte a la circunferencia mayor en T. Unamos C con A y con B. Sean X e Y las intersecciones con las dos circunferencias pequeñas. Unamos X con Y, y sea $O = CT \cap XY$.



Entonces se verifica :

1)El cuadrilátero XCYT es un rectángulo.

2) XY es tangente a los círculos de diámetros AC y BC

3) El área del árbelos es igual a la del círculo de diámetro CT

Probaremos sucesivamente estas tres propiedades.

1) Como $\widehat{AXC} = \widehat{ATB} = \widehat{CYB} = 90º,$ por tratarse de ángulos inscritos que abarcan una semicircunferencia, está claro que XCYT es un rectángulo. Esto tiene una consecuencia que nos será útil más adelante :

1*bis)* XY y CT se cortan en su punto medio O

Para probar 2) necesitamos considerar los centros D y E de los círculos de diámetros AC y CB.

Para demostrar que XY es tangente a los dos círculos, es suficiente que probemos que XY es perpendicular a XD e YE (el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia). Para ello razonamos de la siguiente manera :

XDC es isósceles, porque DX = DC (ambos son radios); y OXC es isósceles también, porque OX y OC son semidiagonales de un rectángulo. Entonces se tiene :

$$\widehat{DXC} = \widehat{DCX}, \text{ y } \widehat{CXO} = \widehat{OCX}. \quad \text{Sumando,}$$

$$\widehat{DXY} = \widehat{DXC} + \widehat{CXO} = \widehat{DCX} + \widehat{OCX} = \widehat{DCT} = 90º, \text{ pues } CT \perp AB.$$

Así se demuestra que XY es tangente al círculo de diámetro AC. Análogamente se probaría que es tangente al de diámetro CB.

Demostremos 3) : sean $DA = r_1, EC = r_2;$ sea O’ el punto medio de AB, y sea $O'A = r.$ Entonces se tiene :

$$AC + CB = AB \Leftrightarrow r_1 + r_2 = r.$$

Consideremos en primer lugar el área del árbelos :

$$Area_{arbelos} = \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi}{2}\left((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = \pi r_1 r_2.$$

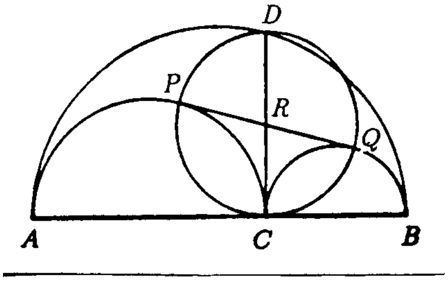
Por otra parte, el teorema de la altura (es decir, la semejanza entre los triángulos rectángulos ACT y BCT) permite escribir

$$\frac{CT}{AC} = \frac{CB}{CT} \Leftrightarrow CT^2 = AC \times CB,$$

luego el área del círculo de diámetro CT vale

$$\pi\left(\frac{CT}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}CT^2 = \frac{\pi}{4}AC \times CB = \frac{\pi}{4}2r_1 2r_2 = \pi r_1 r_2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

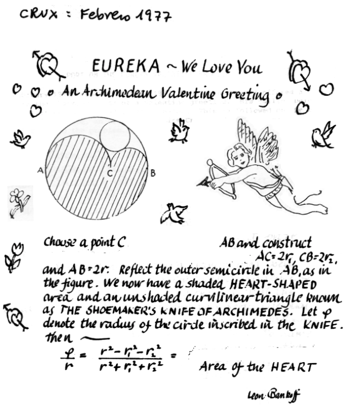


El problema de San Valentín

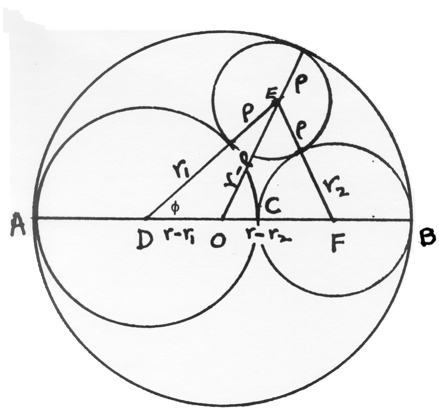
En febrero de 1977, Leon Bankoff envió ”por San Valentín” a la revista canadiense CRUX MATHEMATICORUM (entonces llamada EUREKA), el problema que mostramos en la siguiente transparencia :

Si ρ es el radio de la circunferencia inscrita en el árbelos, entonces

$$\frac{\rho}{r} = \frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{r^2 + r_1^2 + r_2^2} = \frac{Area_{arbelos}}{Area_{corazon}}$$



Posteriormente se publicaron en la revista hasta 10 soluciones del mismo autor, Charles W. Trigg. Daremos una de ellas. Cambiaremos, por conveniencia, un poco las notaciones.



Consideremos el triángulo DOE.

Su perímetro es $r - r_1 + r - \rho + r_1 + \rho = 2r$; usaremos la fórmula de Herón para calcular su área, lo que nos da

$$[DOE] = \sqrt{r(r - r_1 - \rho)\rho r_1} = \sqrt{r(r_2 - \rho)\rho r_1}\,.$$

Ahora consideramos el triángulo FOE. Su perímetro es, de nuevo, $r - \rho + r_2 + \rho + r - r_2 = 2r,$ y su área

$$[FOE] = \sqrt{r(r - r_2 - \rho)\rho r_2} = \sqrt{r(r_1 - \rho)\rho r_2}\,.$$

Pero como ambos triángulos tienen la misma altura, sus áreas están en la misma proporción que sus bases, es decir

$$\frac{\sqrt{r(r_2 - \rho)\rho r_1}}{\sqrt{r(r_1 - \rho)\rho r_2}} = \frac{r - r_1}{r - r_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{r(r_2 - \rho)\rho r_1}{r(r_1 - \rho)\rho r_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Leftrightarrow (r_2 - \rho)r_1^3 = (r_1 - \rho)r_2^3$$

Como nuestro objetivo es despejar $\rho,$ agrupemos convenientemente los términos :

$$r_2 r_1^3 - r_1 r_2^3 = \rho(r_1^3 - r_2^3) \Leftrightarrow r_1 r_2(r_1^2 - r_2^2) = \rho(r_1^3 - r_2^3)$$

y simplificando por $r_1 - r_2$ resulta

$$\rho = \frac{r_1 r_2(r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2},$$

que es lo que queríamos probar pues $r = r_1 + r_2$.

La segunda igualdad propuesta por Bankoff es un simple ejercicio, que dejamos a cargo del lector.

Un procedimiento alternativo para demostrar la igualdad propuesta se basa en el teorema de Stewart aplicado al triángulo DEF con la ceviana EO.

Cuando $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$, el método que hemos expuesto no sirve, porque no se puede simplificar por $r_1 - r_2 = 0$; pero en este caso el triángulo DFE es isósceles, de lados

$$\frac{r}{2} + \rho, \frac{r}{2} + \rho \text{ y } r$$

y altura desde E, $r - \rho$. Entonces, calculando su área de dos maneras distintas, obtenemos

$$\frac{r}{2}(r - \rho) = \sqrt{(r + \rho)\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \rho}\,,$$

y elevando al cuadrado y simplificando resulta

$$r^2 - 3r\rho = 0 \Rightarrow \rho = \frac{r}{3},$$

que además es el máximo valor que alcanza ρ.

Bankoff también encontró un procedimiento muy ingenioso para encontrar (con el compás) los puntos de tangencia del círculo inscrito en el árbelos con los arcos que lo forman :

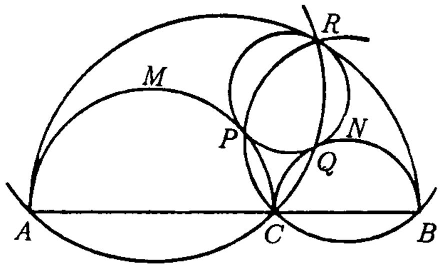
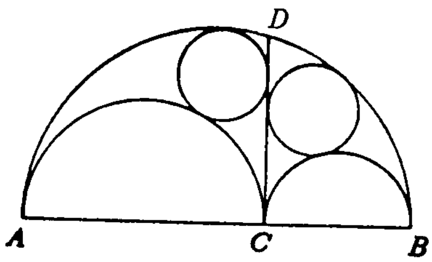


Figure 9: Circles *ACQR, BCPR*

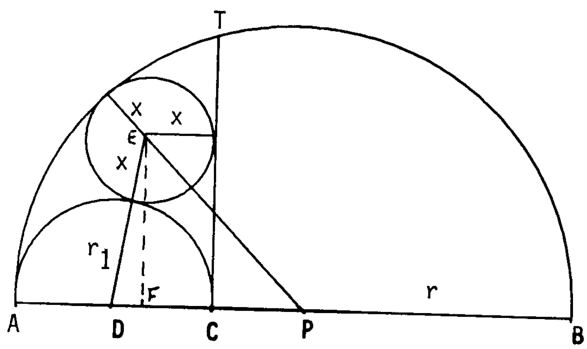
Si M y N son los puntos medios de los arcos AC y CB, con centro en M y radio MA se traza una circunferencia que pasa por A,C,Q y R; con centro en N y radio NB se traza otra circunferencia que pasa por B,C,P y R. Los tres puntos de tangencia buscados son P,Q y R. El círculo inscrito en el árbelos es el circunscrito a PQR.

Los círculos mellizos de Arquímedes : **el inicio de una familia numerosa**.

Consideremos los dos círculos inscritos en las dos porciones del árbelos separadas por la perpendicular desde C sobre AB :



Arquímedes descubrió que esos dos círculos tienen el mismo radio. Les llamaremos *círculos mellizos de Arquímedes*. Vamos a demostrar que sus radios son iguales . Utilizaremos Trigonometría, así que la demostración que demos es relativamente moderna.



Consideremos el círculo de la izquierda, de radio desconocido, *x*. En el triángulo rectángulo EFD, se tiene, por una parte

$$\cos\widehat{EDF} = \frac{DF}{DE} = \frac{r_1 - x}{r_1 + x}.$$

Si P es el punto medio de AB y consideramos el triángulo EPD, el teorema del coseno en este triángulo nos dará :

$$\begin{aligned}(r-x)^2 &= (r_1+x)^2 + (r-r_1)^2 - 2(r_1+x)(r-r_1)\cos\widehat{EDF}\\ &= (r_1+x)^2 + (r-r_1)^2 - 2(r_1+x)(r-r_1)\frac{r_1-x}{r_1+x}\\ &= (r_1+x)^2 + (r-r_1)^2 - 2(r-r_1)(r_1-x).\end{aligned}$$

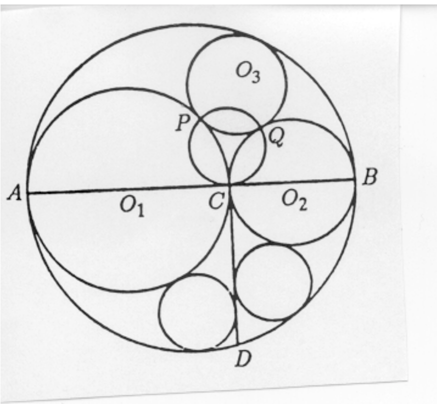
Aunque esta ecuación en x parece complicada, se simplifica para dar

$$0 = 4rx + 4r_1^2 - 4rr_1 \iff r_1(r-r_1) = rx \iff x = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Como, para obtener el radio del otro círculo, sólo hay que cambiar los papeles de r_1 y r_2, es evidente que ambos son iguales.

En 1974, Leon Bankoff publicó en el *Mathematics Magazine* un artículo titulado ”*¿Son realmente mellizos los círculos de Arquímedes*?”. El título estaba justificado : Bankoff encontró un tercer círculo relacionado con el árbelos que tenía el mismo radio que los dos primeros.

He aquí la figura :



Mi colección del *Magazine* comienza, desafortunadamente, en 1975; pero en la misma revista, en 1999, se publicó un extenso artículo titulado *Esos ubicuos círculos arquimedianos*, por cuatro autores (Dodge, Schoch, Woo y Yiu) en el que se incluye una demostración de que el radio de ese tercer círculo coincide con los de los dos primeros, con lo cual ya tendríamos *trillizos*. He modificado ligeramente la demostración, creo que simplificándola (modestia aparte).

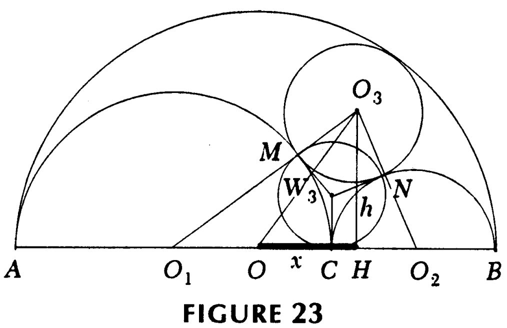


FIGURE 23

Sabemos que el radio ρ del círculo de centro O_3, inscrito en el árbelos , es

$$\rho = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}.$$

Los lados del triángulo $O_1 O_2 O_3$ son $r_1 + r_2, r_1 + \rho$ y $r_2 + \rho,$ con lo que su semiperímetro vale $r_1 + r_2 + \rho;$ y su área, por la fórmula de Herón, es

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)\rho r_1 r_2}\,.$$

Pero el círculo cuyo radio , $y,$ estamos buscando es el círculo inscrito en $O_1 O_2 O_3,$ así que su área(la del triángulo) será igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito :

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)\rho r_1 r_2} = (r_1 + r_2 + \rho) y\,;$$

elevando al cuadrado, simplificando y sustituyendo el valor de ρ obtenemos

$$y^2 = \frac{\rho r_1 r_2}{r_1 + r_2 + \rho} = \frac{\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} r_1 r_2}{r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}} =$$

$$= \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)} =$$

$$= \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \Rightarrow y = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

La familia de círculos de Arquímedes ha aumentado espectacularmente. Bankoff encontró pronto un *cuatrillizo* :

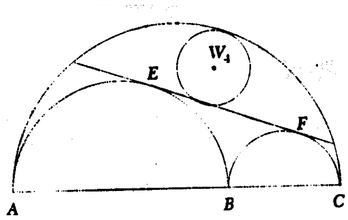
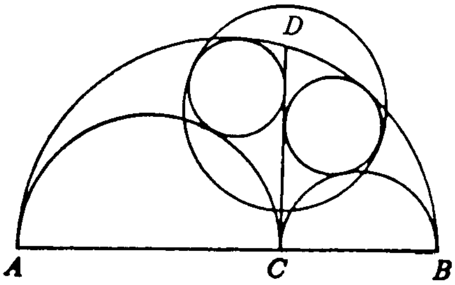


FIGURE 4
The Bankoff circle 4.

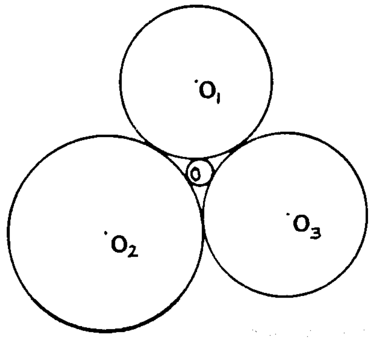
Y, dicho sea de paso, y sin entrar en más detalles, el círculo de diámetro CD también tiene su propio *mellizo* :



A partir del cuatrillizo, han seguido apareciendo nuevos círculos notables, hasta formar una familia infinita. En el artículo del *Mathematics Magazine* de 1999 citado en la Bibliografía se encuentran descritos muchos de ellos.

El teorema de los cuatro círculos, **de Descartes**

Descartes, en el siglo XVII, consideró un problema ligeramente distinto. En su correspondencia con la princesa Isabel, esposa del rey de Bohemia, estudia el caso de tres circunferencias tangentes exteriores entre sí dos a dos, y una cuarta circunferencia, tangente exterior a las tres primeras.



Su teorema de los círculos establece que, en estas condiciones, si r_i es el radio del círculo de centro O_i, se verifica la relación

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2.$$

Este resultado, que se había perdido, fué redescubierto en 1937 por el premio Nobel de Química Sir Frederic Soddy, quien lo extendió al caso de esferas en el espacio, e incluso publicó en la revista *Nature* un poema alusivo, titulado *The kiss precise*[1].

Más modernamente, en el libro de Hidetosi Fukagawa *Japanese Temple Geometry* : *San Gaku*, se publica cómo calcular el radio del cuarto círculo de Descartes, tangente exteriormente a los tres primeros, en función de los radios de éstos :

$$r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}.$$

La demostración está tomada de un libro japonés del siglo XIX, y utiliza la distancia entre los puntos de tangencia dos a dos de los tres primeros círculos, y una astuta semejanza de triángulos rectángulos convenientemente elegidos. Empleando esta fórmula es posible deducir el teorema de Descartes sin demasiada dificultad:

$$\frac{1}{r} = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 + 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_1r_2r_3} =$$
$$= \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_1r_2r_3}$$

y reagrupando y elevando al cuadrado, obtenemos

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1} + \frac{1}{r_1r_2}\right);$$

desarrollando el primer miembro resulta

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} - 2\left(\frac{1}{rr_3} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} - \frac{1}{r_1r_2} - \frac{1}{r_2r_3} - \frac{1}{r_3r_1}\right),$$

así que, al pasar al segundo miembro todo el sustraendo se obtiene, tras simplificar

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = 2\left(\frac{1}{rr_3} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1}\right)$$

de donde, sumando a ambos miembros el primer miembro, resulta

$$2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}\right) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2, \text{ c.q.d.}$$

Una demostración alternativa, también elemental, del teorema de Descartes aparece en la excelente colección de problemas de Geometría plana (en ruso) *Zadachi po planimetrii*(*vol*.1), de Victor Prasolov (problema 3.23b):

Sean $(O_1,r_1),(O_2,r_2),(O_3,r_3)$ los centros y radios de las circunferencias ”de fuera”, y (O,r) de la ”de dentro”. El semiperímetro del triángulo O_2OO_3 es $r_2 + r_3 + r$; y por las fórmulas del coseno del ángulo mitad en un triángulo,

$$\cos^2\left(\frac{\widehat{O_2OO_3}}{2}\right) = \frac{r(r_2 + r_3 + r)}{(r_2 + r)(r_3 + r)}\ ; \sin^2\left(\frac{\widehat{O_2OO_3}}{2}\right) = \frac{r_2r_3}{(r_2 + r)(r_3 + r)}$$

Por otro lado, si $\alpha + \beta + \gamma = 180^o,$ se verifica

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 0$$

(es una consecuencia directa del teorema del coseno; basta sustituir los lados por sus expresiones en función de R y los senos de los ángulos, y simplificar por el factor común $4R^2$). Tal vez la más completa colección de fórmulas de un triángulo se encuentre en el libro de Lalescu *La géométrie du triangle*. Poniendo ahora

$$\alpha = \frac{\widehat{O_2OO_3}}{2}, \beta = \frac{\widehat{O_1OO_3}}{2}, \gamma = \frac{\widehat{O_1OO_2}}{2}$$

se obtiene

$$\frac{r_2r_3}{(r_2 + r)(r_3 + r)} - \frac{r_1r_3}{(r_1 + r)(r_3 + r)} - \frac{r_1r_2}{(r_1 + r)(r_2 + r)} + 2\frac{r_1\sqrt{r\quad r_2r_3(r_2 + r_3 + r)}}{(r_1 + r)(r_2 + r)(r_3 + r)} = 0$$

que es lo mismo que

$$r_2r_3(r_1+r) - r_1r_3(r_2+r) - r_1r_2(r_3+r) + 2r_1\sqrt{r_2r_3r(r_2+r_3+r)} = 0$$

dividiendo por $r_1r_2r_3$ obtenemos

$$\frac{r_1+r}{r_1} - \frac{r_2+r}{r_2} - \frac{r_3+r}{r_3} + 2\sqrt{\frac{r(r_2+r_3+r)}{r_2r_3}} = 0$$

y dividiendo ahora por r resulta

$$\frac{r_1+r}{r_1r} - \frac{r_2+r}{r_2r} - \frac{r_3+r}{r_3r} + 2\sqrt{\frac{(r_2+r_3+r)}{rr_2r_3}} = 0,$$

es decir

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} + 2\sqrt{\frac{1}{rr_3} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_2r_3}} = 0$$

Si, por conveniencia, ponemos $k_i = \frac{1}{r_i}, k = \frac{1}{r},$ la última igualdad se escribe en la forma

$$k_1 - k_2 - k_3 - k + 2\sqrt{kk_2 + kk_3 + k_2k_3} = 0,$$

de donde, elevando al cuadrado,

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k)^2 = 4(kk_2 + kk_3 + k_2k_3). \qquad (*)$$

Partiendo de la identidad algebraica

$$\begin{aligned}(k_1+k_2+k_3+k)^2 &= (k_1-k_2-k_3-k)^2 + 4(k_1k_2+k_1k_3+k_1k) = \\ &= (*) \ = 4(kk_2+kk_3+k_2k_3) + 4(k_1k_2+k_1k_3+k_1k) = \\ &= 2(k_1+k_2+k_3+k)^2 - 2(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k^2),\end{aligned}$$

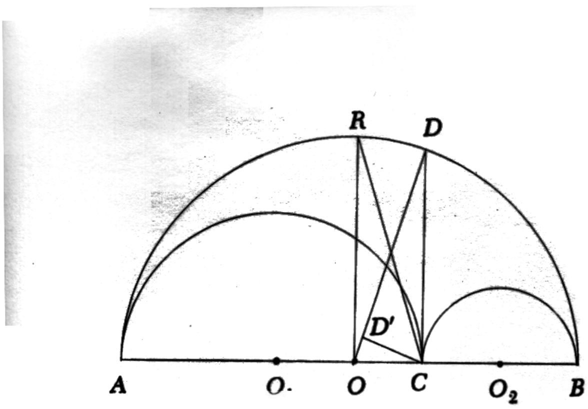
es decir

$$2(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k^2) = (k_1+k_2+k_3+k)^2,$$

que es el teorema de Descartes.[2]

El árbelos y la desigualdad de las medias

¿Quién podría pensar que la desigualdad de las medias, una herramienta del Análisis Matemático, pudiera probarse mediante el árbelos? Pues es así :



Si $AC = a, CB = b,$ con $a \geq b,$ entonces:

i) OR = OD es la media aritmética $M_1 = \frac{a+b}{2}$.

ii) CD es la media geométrica $M_0 = \sqrt{ab}$

iii) CR es la raíz media cuadrática, $M_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

iv) Si D' es el pie de la perpendicular desde C a OD, entonces DD' es la media armónica de a y b : $M_{-1} = \frac{2ab}{a+b}$;

y se verifica

$$a \geq M_2 \geq M_1 \geq M_0 \geq M_{-1} \geq b$$

porque cada término, a excepción de a y b, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto es el término siguiente :

ΔCOR $\Rightarrow M_2 \geq M_1; \Delta OCD \Rightarrow M_1 \geq M_0; \Delta CDD' \Rightarrow M_0 \geq M_{-1}$.

Y, por último,

$$a = AC = AO + OC = RO + OC \geq RC = M_2$$
$$M_{-1} = DD' = OD - OD' = OB - OD' \geq OB - OC = CB = b.$$

Bibliografía

1. ARBELOS, Special Geometry issue, vol. 6, MAA,1988

2. Charles W.Trigg, *How do I love thee?Let me count the ways*. *Eureka* (*hoy CRUX MATHEMATICORUM*), 1977, *p*.217-223.

3.Leon Bankoff : *The marvelous Arbelos*, en *The Lighter side of mathematics*, *MAA*.

4.Dodge, Schoch, Woo, Yiu : *Those ubiquitous Archimedean circles*, en *Mathematics Magazine* 1999, *pp*.202-213.

5.H.Fukagawa y D.Pedoe : *Japanese Temple Geometry* : *SanGaku*. The Charles Babbage Research Centre. Winnipeg, Canada 1989.

6.V.Prasolov: *Zadachi po planimetrii*. Nauka, Moscú, 1991.

Notas

[1] Reproduzco aquí la versión en español del poema de Soddy, tal como viene en el libro de Martin Gardner *Circo Matemático*:

Pueden besarse los labios, dos a dos,
sin mucho calcular, sin trigonometría;
mas ¡ay! no sucede igual en Geometría,
pues si cuatro círculos tangentes quieren ser
y besar cada uno a los otros tres,
para lograrlo habrán de estar los cuatro
o tres dentro de uno, o alguno
por otros tres a coro rodeado.
De estar uno entre tres, el caso es evidente
pues son todos besados desde afuera.
Y el caso tres en uno no es quimera,
al ser éste uno por tres veces besado internamente.

Cuatro círculos llegaron a besarse,
cuanto menores tanto más curvados,
y es su curvatura tan sólo la inversa

de la distancia desde el centro.
Aunque este enigma a Euclides asombrara,
ninguna regla empírica es necesaria:
al ser las rectas de nula curvatura
y ser las curvas cóncavas tomadas negativas,
la suma de cuadrados de las cuatro curvaturas
es igual a un medio del cuadrado de su suma.

Espiar de las esferas
los enredos amorosos
pudiérale al inquisidor
requerir cálculos tediosos,
pues siendo las esferas más *corridas*,
a más de un par de pares
una quinta entra en la *movida*.
Empero, siendo signos y ceros como antes
para besar cada una a las otras cuatro,
El cuadrado de la suma de las cinco curvaturas
ha de ser triple de la suma de sus cuadrados.

En enero de 1937, la revista inglesa *Nature*,que había publicado el poema de Soddy, publicó una cuarta estrofa que generalizaba la fórmula a espacios de n dimensiones, original de Thorold Gosset :

No debemos empero confinar nuestros cuidados
a los simples círculos, esferas y planos,
sino elevarnos a n –espacios e hipercurvaturas
donde también las múltiples tangencias son seguras.
En n –espacios, los pares de tangentes
son hiperesferas, y es verdad
_ más no evidente _
cuando $n+2$ de ellas se osculéan
cada una con $n+1$ compañeras
Que el cuadrado de la suma de todas las curvaturas
es n veces la suma de sus cuadrados.

[2]Una demostración similar a la de Prasolov, pero más general porque comprende también el caso de los dos tipos de tangencia (externa e interna) de la cuarta circunferencia con las otras tres, está publicada en el libro de Dimitrios Kontogiannis *Geometria*, Atenas 1987 (en griego moderno y manuscrito).

Valladolid, 21 de abril de 2002
Francisco Bellot Rosado