Problema 5.-

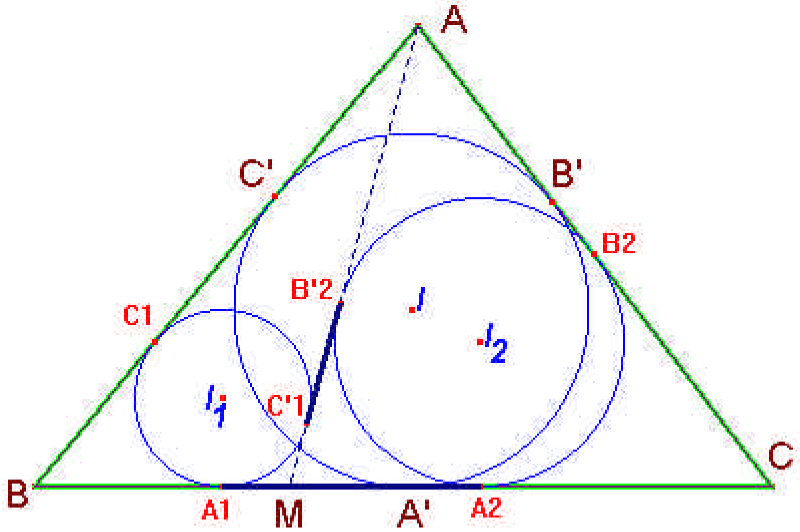
Se considera el triángulo ABC y sea M un punto del segmento BC.
Sean r_1, r_2, r, los inradios de los triángulos AMB, AMC y ABC ; y sean s_1, s_2, s, los radios de los círculos situados en el interior del ángulo A y exinscritos a AMB.AMC yABC, respectivamente.
Demostrar que se verifican las relaciones siguientes:

a) $p\cdot(r-r_1)\cdot(r-r_2)=(p-a)\cdot r_1\cdot r_2$
b) $r\cdot(s_2-s_1)=s\cdot(r_2-r_1)$

donde: $2p = a+b+c$
(Este resultado puede considerarse clásico)

Solución:

Cuestión a)
Para clarificar la situación, consideremos la siguiente situación gráfica:



donde se señalan los segmentos $C'_1B'_2$ y A_1A_2 que son los segmentos de tangencia comunes, interior y exterior, a las circunferencias inscritas en los triángulos AMB y AMC, respectivamente. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior $C'_1B'_2$; $C'_1B'_2 = AC'_1 - AB'_2 = AC_1 - AB_2 = (c - BC_1) - (b - CB_2)$
Ahora bien, $BC' = p-b$ y $CB' = p-c$; y según las relaciones de semejanza existentes entre los siguientes pares de triángulos: BI_1C_1 y BIC'; y CI_2B_2 y CIB', podemos entonces expresar que $BC_1 = x_1 = \frac{r_1}{r}.(p-b)$ y que $CB_2 = x_2 = \frac{r_2}{r}.(p-c)$.
Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:
$I_1I_2^2 = (r_1 + r_2)^2 + C'_1B'_2{}^2$;
$I_1I_2^2 = (r_1 + r_2)^2 + (c - x_1 - b + x_2)^2$; (1)

-Para la tangente exterior A_1A_2; $A_1A_2 = a - x_1 - x_2$
Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:
$I_1I_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + A_1A_2{}^2$;
$I_1I_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + (a - x_1 - x_2)^2$; (2)

- De las anteriores relaciones (1) y (2), deducimos la relación (3)
$(r_1+ r_2)^2 + (c–x_1–b + x_2)^2 = (r_2– r_1)^2 + (a–x_1–x_2)^2$ (3);
Tras un poco de álgebra llegamos a esta otra relación más simple:
$a^2 –b^2 –c^2 +2bc – 2·(a+b–c)x_1 –2·(a–b+c)x_2 +4x_1x_2 = 4·r_1r_2$
$a^2–(b–c)^2 –4(p–c)x_1–4(p–b)x_2 + 4x_1x_2 = 4·r_1r_2$
$(a–b+c)·(a+b–c) –4(p–c)x_1–4(p–b)x_2 + 4x_1x_2 = 4·r_1r_2$
$4·(p–b)(p–c) –4(p–c)x_1–4(p–b)x_2 + 4x_1x_2 = 4·r_1r_2$

Sustituyendo $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y $x_2= \frac{r_2}{r}.(p-c)$, obtenemos:

$(p–b)(p–c) – \frac{r_1}{r}.(p-b)\,(p–c)– \frac{r_2}{r}.(p-c)\,(p–b)+ \left(\frac{r_1}{r}.(p-b)\right)·\left(\frac{r_2}{r}.(p-c)\right)= r_1r_2$

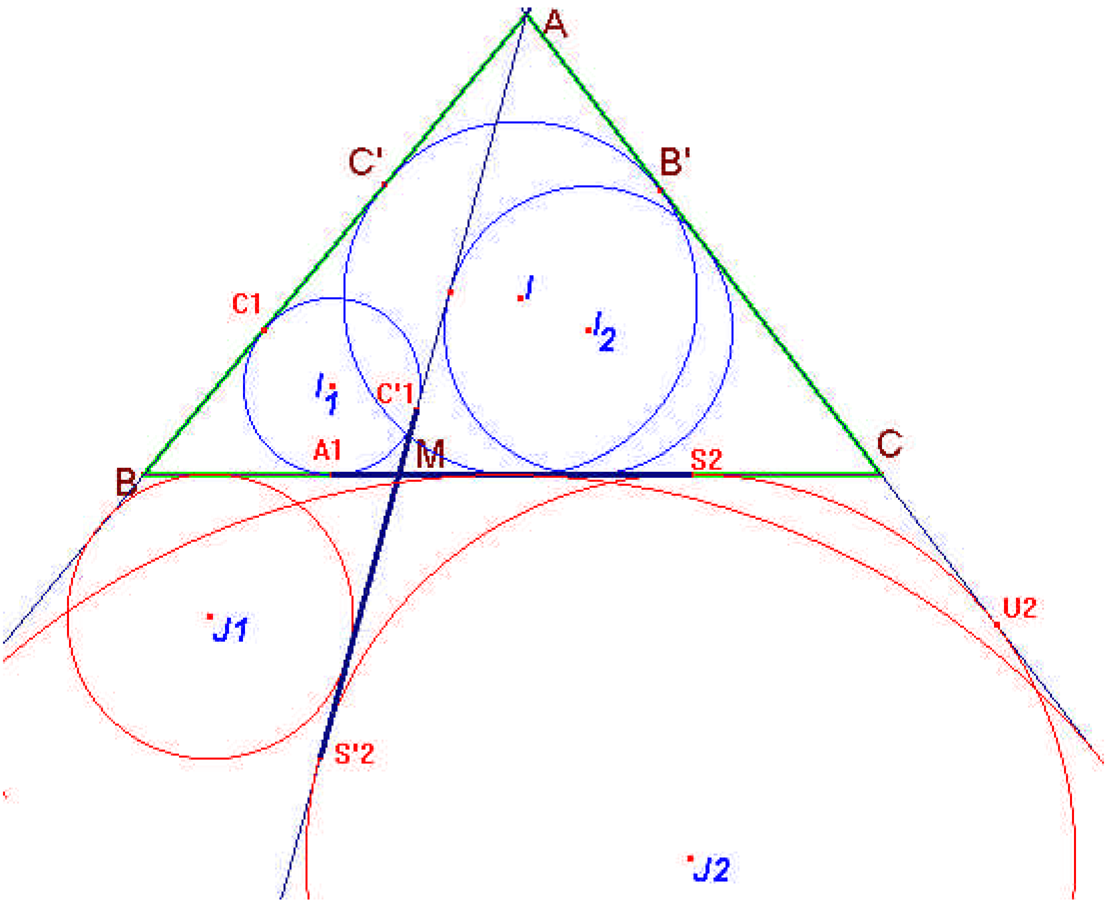
Sea Δ=Area del triángulo ABC; entonces $\Delta^2= p(p–a)(p–b)(p–c)= p^2·r^2$, tenemos que:
$(p–b)(p–c)= p·r^2/(p–a)$ y entonces sustituyendo esta expresión en la última relación conseguimos:
$p·r^2/(p–a) – p·r·r_1 /(p–a)– p·r·r_2 /(p–a)+ p·r_1·r_2 /(p–a)= r_1r_2$

$p·r^2 – p·r·r_1– p·r·r_2 + p·r_1·r_2 = (p–a)·r_1r_2$;

y, finalmente:

$$\mathbf{p\times(r-r_1)\times(r-r_2) = (p-a)\times r_1r_2}$$

Cuestión b)



En este segundo caso, vamos a tener en cuenta los segmentos A_1S_2 y $C'_1S'_2$ que son los segmentos de tangencia comunes, interiores ambos, a las circunferencias, la una inscrita al triángulo AMB y la otra exinscrita al triángulo AMC. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior A_1S_2; $A_1S_2 = a - x_1 - y_2$

donde $x_1 = \frac{r_1}{r}.(p-b)$ e $y_2 = \frac{s_2}{s}.(p-b)$.

Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + A_1S_2^{\ 2}$;

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + (a - x_1 - y_2)^2$; (4)

-Para la otra tangente interior $C'_1S'_2$; $C'_1S'_2 = AS'_2 - AC'_1 = AU_2 - AC_1 = (b + y_2) - (c - x_1)$

Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + C'_1S'_2{}^2$;

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + (b + y_2 - c + x_1)^2$; (5)

- De las anteriores relaciones (4) y (5), deducimos la relación (6)
$(r_1+ s_2)^2 + (a–x_1–y_2)^2 = (r_1+ s_2)^2 + (b+ y_2 –c + x_1)^2$ (6);
Con un poco de álgebra vamos obteniendo las siguientes identidades:
$\cancel{(r_1+ s_2)}^2 + (a–x_1–y_2)^2 = \cancel{(r_1+ s_2)}^2 + (b+ y_2 –c + x_1)^2$;
$(a–x_1–y_2)^2–(b+ y_2 –c + x_1)^2 = 0$;
$[(a–x_1–y_2)+(b+ y_2 –c + x_1)]\cdot[(a–x_1–y_2)–(b+ y_2 –c + x_1)] = 0$;
$[a + b –c]\cdot[a – b + c –2\cdot(x_1+y_2)] = 0$;
$(p– b)–(x_1+ y_2) = 0$;
Sustituyendo $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y $y_2=\frac{s_2}{s}.(p-b)$, obtenemos:
$(p–b) –[\frac{r_1}{r}.(p-b)+\frac{s_2}{s}.(p-b)]= 0$
$r\cdot s – s\cdot r_1 – r\cdot s_2 = 0$ (7)

Si ahora actuamos de igual manera pero con los triángulos de radios r_2 y s_1 conseguiríamos la siguiente relación
$r\cdot s – s\cdot r_2 – r\cdot s_1 = 0$ (7')

De ambas expresiones, (7) y (7') resulta finalmente:

$$\mathbf{r \times (s_2 - s_1) = s \times (r_2 - r_1)}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI