Teorema de Harcourt

Por Juan Carlos Salazar

1. Introducción:

Este teorema establece una relación interesante para el cálculo del área (S) de un triángulo (ABC), que involucra a los lados del triángulo (a, b, c) y las distancias (a_1, b_1, c_1) desde los vértices (A, B, C) respectivos hacia una tangente cualesquiera sobre el incírculo o excírculo, según sea el caso. La única referencia escrita de este teorema, facilitada por el Prof. Francisco Bellot Rosado [1], que se encontró sin demostración por métodos geométricos, establece la relación para el caso del incírculo, esto motivó al autor para tratar de encontrar un método de demostración apropiado y como resultado del método de demostración desarrollado, se interpretó que también es aplicable para el caso del excírculo [2]. Se incluyen además dos problemas de aplicación de este teorema.

2. Teorema de Harcourt para el Incírculo:

Sea el triángulo ABC con lados a, b y c. Si las distancias desde los vértices A, B y C hacia una tangente al incírculo por el menor arco cercano al vértice A, son a_1, b_1, c_1 respectivamente, luego el área (S) del triángulo ABC es igual a $\frac{(-a.a_1 + b.b_1 + c.c_1)}{2}$.(Ver Fig.1)

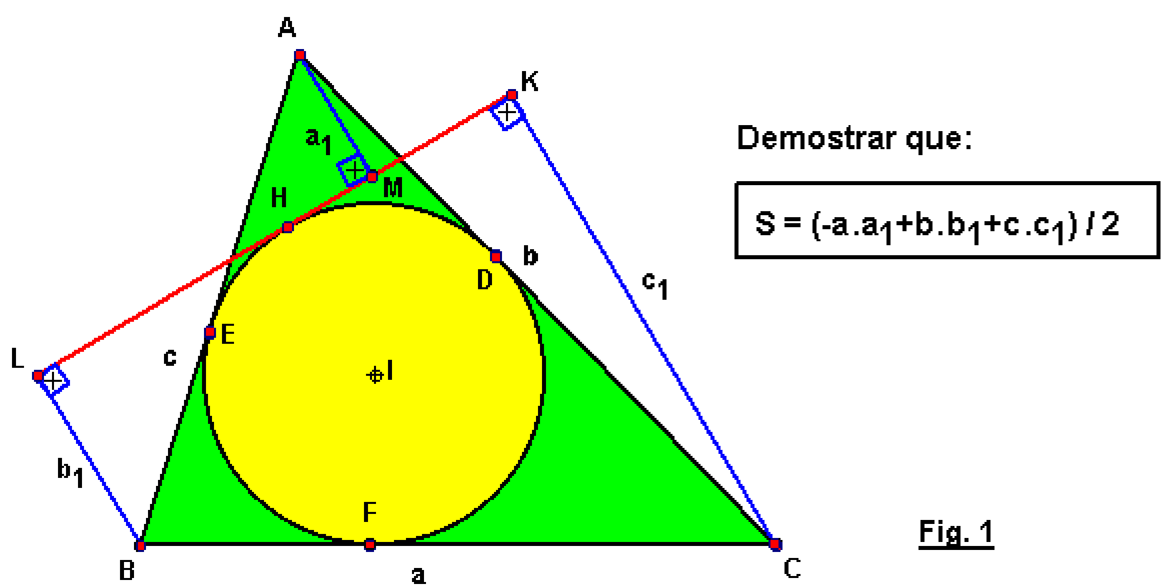
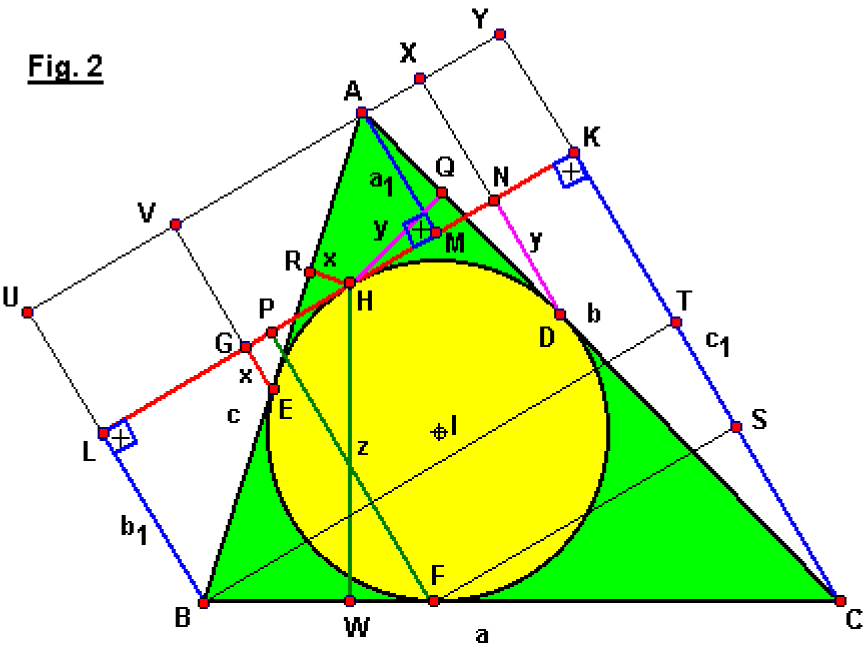


Fig. 1

Demostración:
Considerando el punto de tangencia H con sus respectivas distancias HR = x, HW = z y HQ = y hacia los lados AB = c, BC = a y AC = b respectivamente, tenemos además que las distancias desde los otros puntos de tangencia D, E y F hacia la tangente LK cumplen con las siguientes relaciones EG = x, DN = y y FP = z. (Ver Fig.2)

Fig. 2



Trazamos por el vértice A, UY // LK también BT // LK // FS, además UB // VE // PF // AM // XD // YC. Sabemos que $p = \dfrac{(a+b+c)}{2}$ (semiperímetro).

Luego tenemos que: AM = UL = VG = XN = YK = a_1, también CT = $c_1 - b_1$ y CS = $c_1 - z$.

Entonces:

AreaABC = S = AreaAHB + AreaAHC + AreaBHC

$$S = \frac{1}{2}.AB.HR + \frac{1}{2}.AC.HQ + \frac{1}{2}.BC.HW$$

$$S = \frac{1}{2}.c.x + \frac{1}{2}.b.y + \frac{1}{2}.a.z\ldots\ldots\ldots(1)$$

Por semejanza de triángulos:

AEV-ABU: $\dfrac{EV}{BU} = \dfrac{AE}{AB} \rightarrow \dfrac{(x+a_1)}{(a_1+b_1)} = \dfrac{(p-a)}{c}$

$$\rightarrow x = \frac{(p-a)(a_1+b_1)}{c} - a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ADX-ACY: $\dfrac{DX}{CY} = \dfrac{AD}{AC} \rightarrow \dfrac{(y+a_1)}{(a_1+c_1)} = \dfrac{(p-a)}{b}$

$$\rightarrow y = \frac{(p-a)(a_1+c_1)}{b} - a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

CFS-CBT: $\dfrac{CS}{CT} = \dfrac{FC}{BC} \rightarrow \dfrac{(c_1-z)}{(c_1-b_1)} = \dfrac{(p-c)}{a}$

$$\rightarrow z = c_1 - \frac{(p-c)(c_1-a_1)}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Reemplazando (2),(3) y (4) en (1):

$$S=\frac{1}{2}.c.[\frac{(p-a)(a_1+b_1)}{c}-a_1]+\frac{1}{2}.b.[\frac{(p-a)(a_1+c_1)}{b}-a_1]+\frac{1}{2}.a.[c_1-\frac{(p-c)(c_1-a_1)}{a}]$$

Simplificando obtenemos:

$$S=\frac{(-a.a_1+b.b_1+c.c_1)}{2} \qquad \text{LQQD.}$$

3. Teorema de Harcourt para el Excírculo:

Sea el triángulo ABC con lados a, b y c. Si las distancias desde los vértices A, B y C hacia una tangente al excírculo relativo al vértice A, son a_1, b_1, c_1 respectivamente, luego el área (S) del triángulo ABC es igual a $\frac{(-a.a_1+b.b_1+c.c_1)}{2}$.(Ver Fig.3)

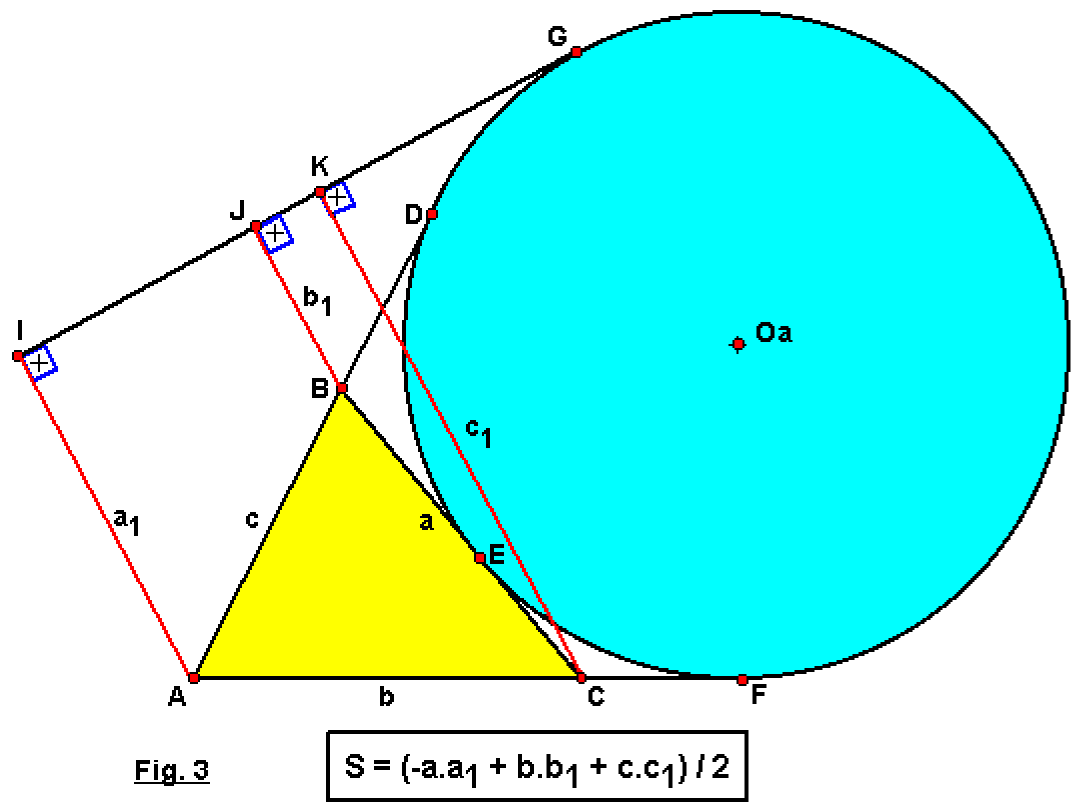
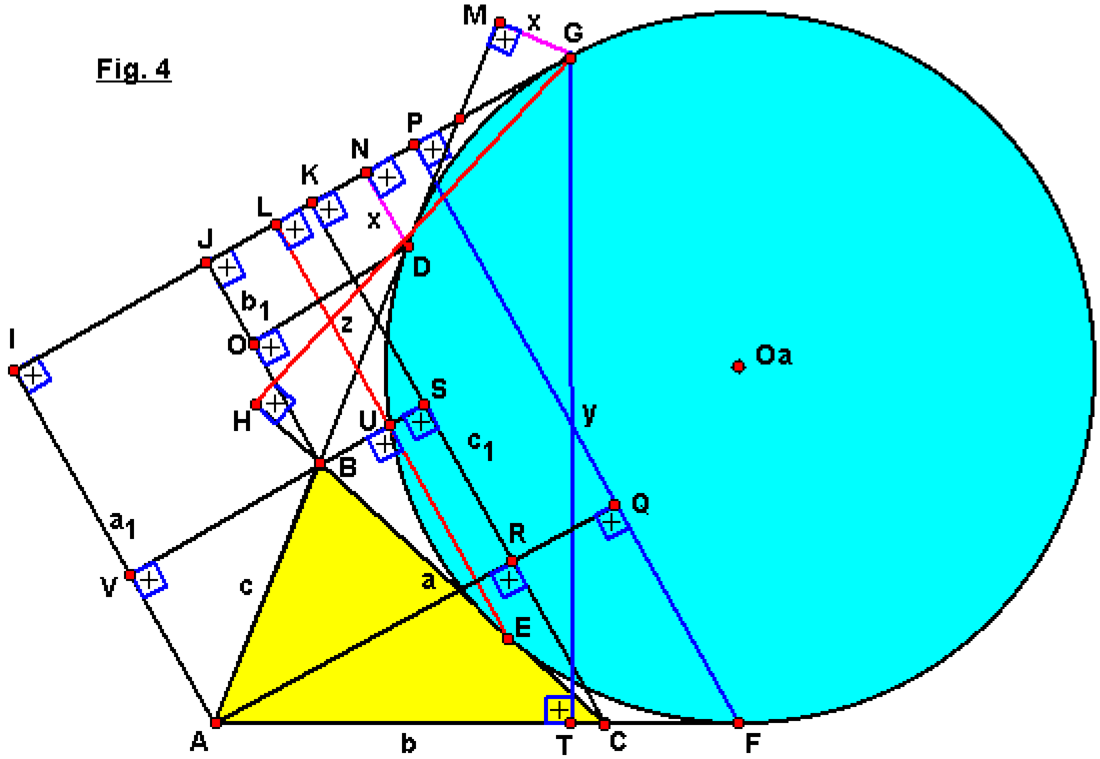


Fig. 3

Demostración:

De manera similar al método desarrollado para el caso del incírculo, tomamos como referencia al punto de contacto G de la tangente con el excírculo. Las distancias hacia los lados o prolongaciones del triángulo ABC, son GM = x, GT = y y GH = z . Para los puntos de tangencia D, E y F, sus distancias a la tangente IG cumplen las siguientes relaciones: DN = x , FP = y , y EL = z. (Ver Fig. 4). Además trazamos EL//FP//AI//BJ//CK, por el vértice B VS//IG, también OD//IG y AQ//IG.



También: $OB = b_1 - x$, $AV = a_1 - b_1$, $FQ = y - a_1$, $CR = c_1 - a_1$, $UE = z - b_1$ y $CS = c_1 - b_1$.

Entonces:

AreaABC = S = AreaAGB + AreaAGC – AreaBGC

$$S = \frac{1}{2}.AB.GM + \frac{1}{2}.AC.GT - \frac{1}{2}.BC.GH$$

$$S = \frac{1}{2}.c.x + \frac{1}{2}.\ b.y - \frac{1}{2}.a.z\text{........}(1)$$

Por semejanza de triángulos:

$$\text{BOD-AVB: } \frac{OB}{BD} = \frac{AV}{AB} \rightarrow \frac{(b_1 - x)}{(p - c)} = \frac{(a_1 - b_1)}{c}$$

$$\rightarrow x = b_1 - \frac{(a_1 - b_1)(p - c)}{c}\text{.............}(2)$$

$$\text{AQF-ARC: } \frac{FQ}{AF} = \frac{CR}{AC} \rightarrow \frac{(y - a_1)}{p} = \frac{(c_1 - a_1)}{b}$$

$$\rightarrow y = \frac{p(c_1 - a_1)}{b} + a_1\text{.....................}(3)$$

$$\text{BUE-BSC: } \frac{UE}{BE} = \frac{CS}{BC} \rightarrow \frac{(z - b_1)}{(p - c)} = \frac{(c_1 - b_1)}{a}$$

$$\rightarrow z = \frac{(p - c)(c_1 - b_1)}{a} + b_1\text{............}(4)$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1):

$$S = \frac{1}{2}.c.[b_1 - \frac{(a_1 - b_1)(p-c)}{c}] + \frac{1}{2}.b.[\frac{p(c_1 - a_1)}{b} + a_1] - \frac{1}{2}.a.[\frac{(p-c)(c_1 - b_1)}{a} + b_1]$$

Simplificando obtenemos:

$$S = \frac{(-a.a_1 + b.b_1 + c.c_1)}{2} \qquad \text{LQQD.}$$

4. Problemas de Aplicación:

Problema 1:

Sea el triángulo ABC cuyos excírculos son (Oa), (Ob) y (Oc). Si trazamos AH y CG perpendiculares a la tangente común de los excírculos (Oa) y (Oc) , de manera similar trazamos BF y AE perpendiculares a la tangente común de (Oa) y (Ob) además BI y CJ perpendiculares a la tangente común de (Ob) y (Oc). Demostrar que : AH.BF.CJ = AE.BI.CG. [2] (Ver Fig.1a).

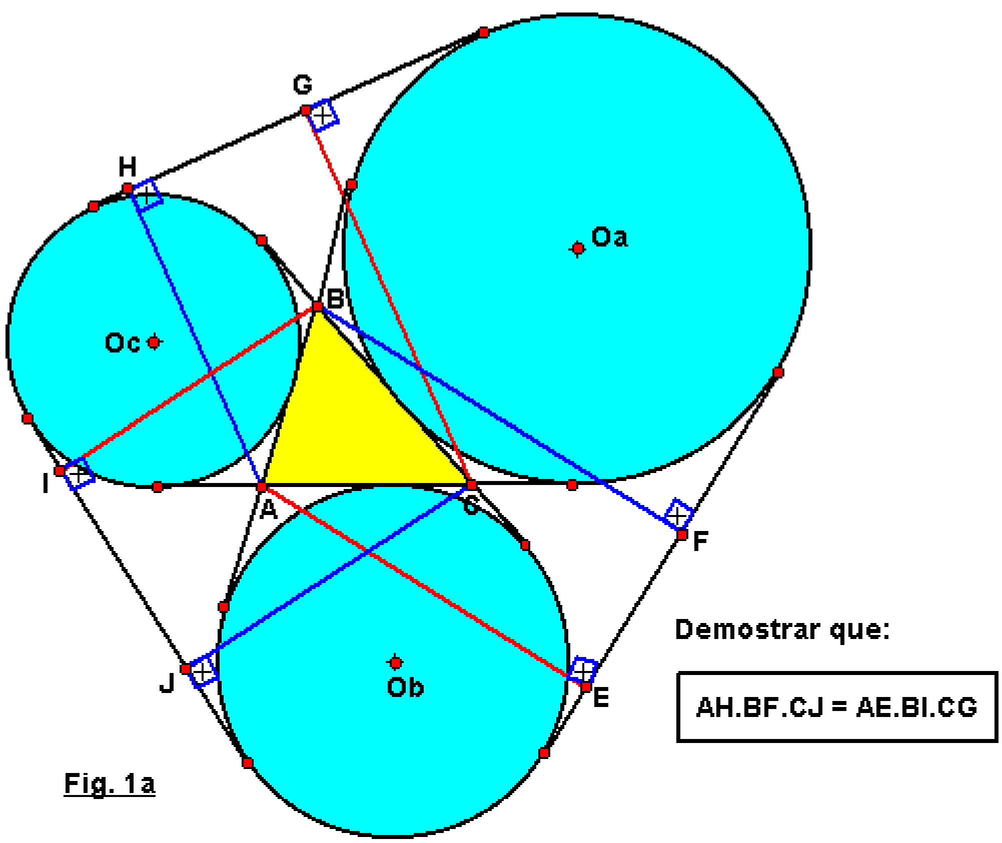


Fig. 1a

Demostración:

Aplicaremos el teorema de Harcourt para el caso del excírculo, por tal motivo trazamos las perpendiculares "que faltan" desde los vértices hacia las tangentes AP, BQ y CT.(Ver Fig. 1b). Por lo tanto tenemos que estas perpendiculares son iguales a las alturas del triángulo es decir: AP = ha, BQ = hb y CT = hc.

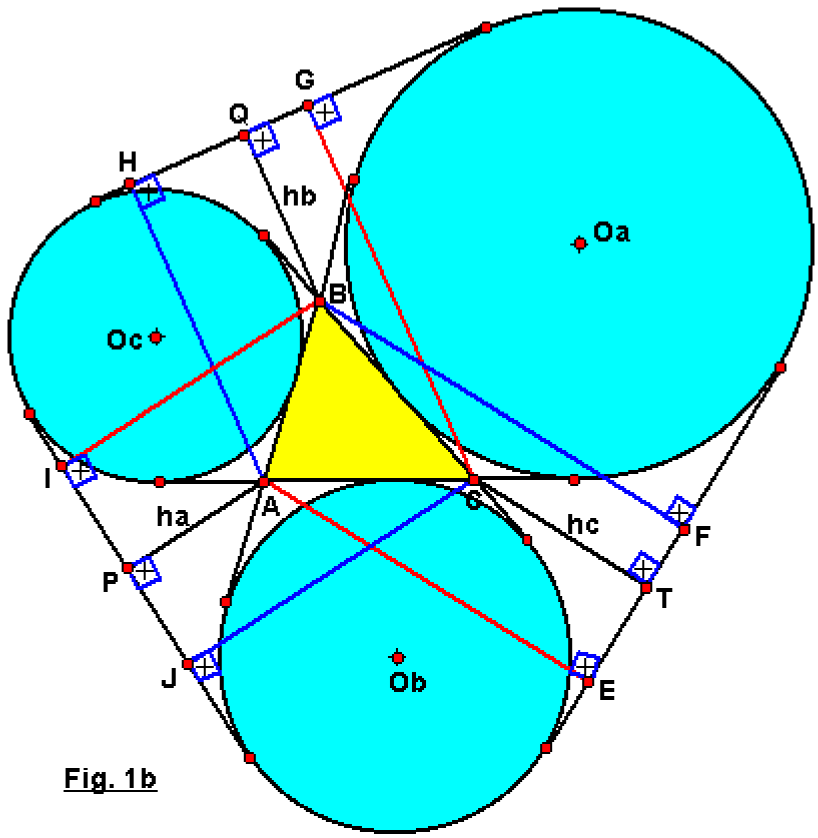


Fig. 1b

Aplicamos Harcourt con la tangente común a (Oa) y (Oc):

$$S = \frac{(-BC.AH + AC.BQ + AB.CG)}{2}$$

$$S = \frac{(-a.AH + b.BQ + c.CG)}{2}$$

$$S = \frac{(-a.AH + b.hb + c.CG)}{2}$$

Por lo tanto:

a.AH = c.CG...............(1)

De manera similar, tenemos:

Para la tangente común a (Ob) y (Oc):

c.CJ = b.BI…………..(2)

Para la tangente común a (Oa) y (Ob):

b.BF = a.AE................(3)

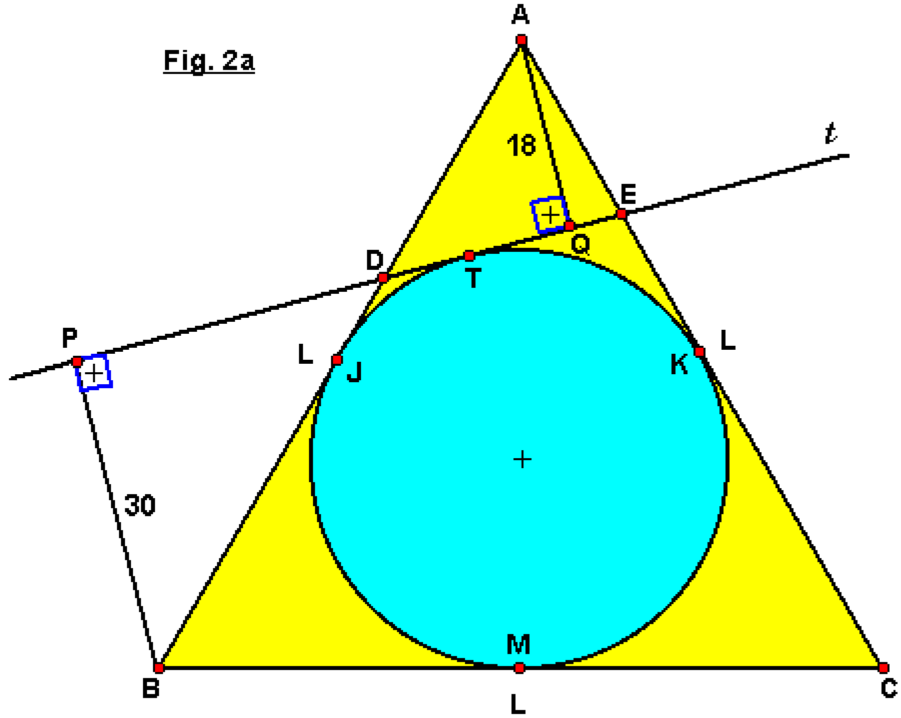
Combinando (1), (2) y (3) tenemos:

AH.BF.CJ = AE.BI.CG   LQQD.

Problema 2:

Sea el triángulo equilátero ABC, de lado L. Por un punto del menor arco de su incírculo cercano al vértice A, se traza una tangente al mismo, de tal forma que las distancias desde los vértices A y B son 18 y 30 respectivamente. Calcular L.(Ver Fig. 2a).

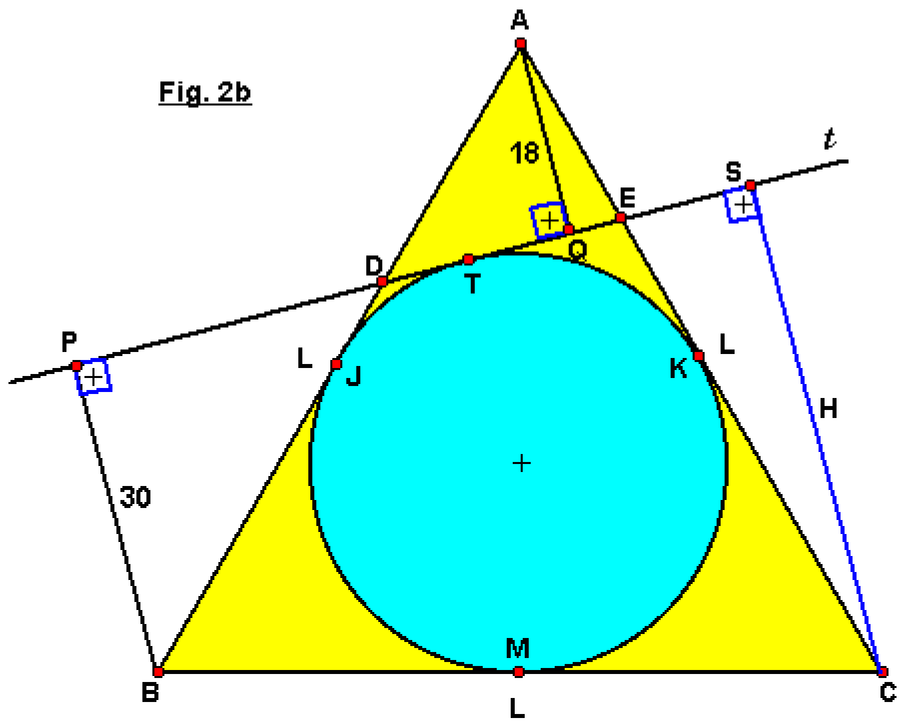
Fig. 2a



Solución:

Trazamos la perpendicular CS = H, hacia la tangente t .(Ver Fig. 2b)

Fig. 2b



Aplicamos Harcourt caso del incírculo en el triángulo ABC:

$$\text{AreaABC} = S = \frac{(-BC.AQ + AC.BP + AB.CS)}{2} = \frac{(-L(18) + L(30) + LH)}{2}$$

$$S = \frac{L(12+H)}{2} \ldots\ldots\ldots(1)$$

También:

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Por semejanza de triángulos:

AQE-ESC: $\frac{AQ}{AE} = \frac{CS}{CE} \rightarrow \frac{18}{AE} = \frac{H}{CE} \rightarrow \frac{(18+H)}{L} = \frac{18}{AE} = \frac{H}{CE}$

Luego: $AE = \frac{18L}{(H+18)}$ y $CE = \frac{LH}{(H+18)}$

AQD-BPD: $\frac{AQ}{AD} = \frac{BP}{BD} \rightarrow \frac{18}{AD} = \frac{30}{BD} \rightarrow \frac{48}{L} = \frac{18}{AD} = \frac{30}{BD}$

Luego: $AD = \frac{18L}{48} = \frac{3L}{8}$ y $BD = \frac{30L}{48} = \frac{5L}{8}$

Además para el triángulo ADE:

$AJ = AK = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}.$ (AD +AE +DE) de donde: $\frac{L}{2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{3L}{8} + \frac{18L}{(18+H)} + DE\right)$

Luego: $DE = \frac{L(5H-54)}{8(H+18)}$

Entonces:

$$\text{AreaADE} = \frac{DE.AQ}{2} = \frac{9L(5H-54)}{8(18+H)} \ldots\ldots\ldots(3)$$

Aplicando relación de áreas:

$$\frac{\text{AreaADE}}{\text{AreaABC}} = \frac{AD.AE}{AB.AC}$$

$$\frac{\text{AreaADE}}{\text{AreaABC}} = \frac{(\frac{3L}{8})(\frac{18L}{H+18})}{L^2}$$

$$\frac{\text{AreaADE}}{\text{AreaABC}} = \frac{54}{8(H+18)} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Combinando (1), (3) y (4) obtenemos:

$$\text{AreaADE} = \frac{9L(5H-54)}{8(H+18)} = \frac{27L(H+12)}{8(H+18)}$$

Luego: 5H – 54 = 36 +3H de donde H = 45.

De (1) y (2):

$S = \frac{L(12+H)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ reemplazando H, finalmente tenemos que $L = 38\sqrt{3}$.

5. Comentarios:

Si observamos en la Fig.1a, correspondiente al Problema 1 y denotamos por A', B' y C' a los puntos de intersección de los pares de perpendiculares BF y CG, AE y CJ, AH y BI respectivamente, podemos demostrar que el hexágono AC'BA'CB' es equilátero con lado igual al circunradio del triángulo ABC y el triángulo A'B'C' es homotético y congruente con el triángulo ABC, teniendo como centro de homotecia al centro del círculo de los nueve puntos del triángulo ABC.
No se descarta que las relaciones obtenidas por medio de la aplicación del teorema de Harcourt se puedan obtener por la aplicación de otras relaciones métricas ya conocidas, sin embargo creemos que el conocimiento de este teorema facilitará establecer las relaciones correspondientes por su aplicación de una forma directa, como conclusión podemos afirmar que tenemos una nueva herramienta para aprovecharla.
Finalmente no podemos dejar de mencionar que este teorema puede ser generalizado en una forma analítica, cuya relación se puede establecer haciendo uso de coordenadas baricéntricas homogéneas.[2]

6. Agradecimientos:

Aprovecho la oportunidad por medio de esta tribuna, de agradecer el inestimable apoyo que he recibido del Profesor Francisco Bellot Rosado, editor de la Revista Escolar de las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas. Ha sido muy importante su preocupación y constante comunicación para lograr este cometido: el "rescate" de este teorema olvidado por muchos.

Referencias:

[1] F.G.-M., Exercises de Géométrie, Pag. 750, Sexta Edición, 1920, Editorial Jacques Gabay, París, Reimpresión 1991.

[2] Harcourt's Theorem By Nikolaos Dergiades and Juan Carlos Salazar, Forum Geometricorum, FG200313, 117-124.
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3

Nota:

Juan Carlos Salazar colabora con la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (IMO Venezuela) que preside el Prof. Rafael Sánchez Lamoneda.
Email: caisersal@yahoo.com.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: