Miguel Amengual Covas

La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo.

Este artículo es continuación del publicado en el número 5 (enero-febrero 2003). En esta segunda parte se establecen seis desigualdades geométricas y dos trigonométricas, elementales las ocho, de las que se deduce inmediatamente la desigualdad de Euler.

Las notaciones que se hacen servir son las habituales para un triángulo ABC.

8. $$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geq\frac{2}{R}$$

Multiplicando miembro a miembro las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} a &= (s-b)+(s-c)\geq 2\sqrt{(s-b)(s-c)}\\ b &= (s-c)+(s-a)\geq 2\sqrt{(s-c)(s-a)}\\ c &= (s-a)+(s-b)\geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)} \end{aligned}$$

resulta

$$abc\geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

que, habida cuenta de la fórmula

$$r^2s=(s-a)(s-b)(s-c), \qquad (1)$$

obtenida a partir de la Herón y de la expresión rs para el área del triángulo, escribimos equivalentemente en la forma

$$\frac{1}{2rs}\geq\frac{4r}{abc}\ .$$

Multiplicando ambos miembros de esta última por

$$a+b+c=2s \qquad (2)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2rs} &\geq 2\cdot\frac{4rs}{abc}\\ &=\frac{2}{R} \qquad (\text{pues } abc=4Rrs \quad (3)) \end{aligned}$$

Resta tan sólo observar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{a}{2rs}+\frac{b}{2rs}+\frac{c}{2rs} \qquad (\text{por } (2))\\ &=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \qquad \left(rs=\frac{1}{2}ah_a,\ \text{etc}\right) \end{aligned}$$

para obtener la desigualdad enunciada.

Tal desigualdad es equivalente a

9. $$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\geq\frac{2}{R}$$

donde r_a , r_b , r_c son los radios de las circunferencias excritas al triángulo ABC .

En efecto, a partir de las conocidas relaciones

$$r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)=rs$$

resulta inmediatamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}&=\frac{s-a}{rs}+\frac{s-b}{rs}+\frac{s-c}{rs}\\&=\frac{1}{r}\end{aligned}$$

10. $$6\leq\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}=\frac{4R-2r}{r}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}&=\left(\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}\right)+\left(\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_b}\right)+\left(\frac{r_c}{r_a}+\frac{r_a}{r_c}\right)\\&\geq 2+2+2\\&=6\end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de las relaciones (2), (3) y $ab+bc+ca=r^2+s^2+4Rr$ y siendo

$$\frac{r_a+r_b}{r_c}=\frac{\dfrac{s-a}{rs}+\dfrac{s-b}{rs}}{\dfrac{s-c}{rs}}=\frac{c}{s-c}$$

y cíclicamente, resulta

$$\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}=\frac{c}{s-c}+\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}$$
$$=\frac{(a+b+c)s^2-2(ab+bc+ca)s+3abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{2s\cdot s^2-2s\left(r^2+s^2+4Rr\right)+12Rrs}{r^2s}$$
$$=\frac{4R-2r}{r}$$

11. $9r\le r_a+r_b+r_c\le\frac{9R}{2}$

Tenemos

$$r_a+r_b+r_c=\frac{rs}{s-a}+\frac{rs}{s-b}+\frac{rs}{s-c}$$
$$=r\cdot[(s-a)+(s-b)+(s-c)]\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)$$
$$\ge r\cdot 9\ ,$$

que es la primera desigualdad.

La segunda puede escribirse en la forma

$$\frac{rs}{s-a}+\frac{rs}{s-b}+\frac{rs}{s-c}\le\frac{9abc}{8rs}$$

que es equivalente a

$$9abc-8r^2s^2\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\ge 0$$

la cual, en función de $x=s-a>0$, $y=s-b>0$, $z=s-c>0$ se escribe

$$9(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 0$$

reduciéndose a

$$x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2-6xyz\ge 0\,.$$

La validez de esta última se establece inmediatamente a partir de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica: en efecto,

$$x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2 \geq 6\sqrt[6]{\left(x^2y\right)\left(x^2z\right)\left(xy^2\right)\left(xz^2\right)\left(y^2z\right)\left(yz^2\right)}$$
$$= 6xyz$$

12. $$3R \leq a\cdot\tan\frac{A}{2}+b\cdot\tan\frac{B}{2}+c\cdot\tan\frac{C}{2} \leq 5R-4r$$

Si expresamos en función $x=s-a>0$, $y=s-b>0$, $z=s-c>0$ las tangentes de los semiángulos así como las longitudes que aparecen, obtenemos

$$3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} \leq \sum (y+z)\sqrt{\frac{yz}{(x+y+z)x}} \leq 5\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}-4\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

que se reduce a

$$3(x+y)(y+z)(z+x) \leq \sum 4yz(y+z) \leq 5(x+y)(y+z)(z+x)-16xyz$$

Una y otra desigualdades son equivalentes a la desigualdad

$$x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2-6xyz \geq 0$$

que hemos visto anteriormente.

13. $$9r \leq m_a+m_b+m_c \leq \frac{9R}{2}$$

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy
$$(ux+vy+wz)^2 \leq \left(u^2+v^2+w^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$
con $u=m_a$, $v=m_b$, $w=m_c$, $x=y=z=1$ y tenemos en cuenta la relación $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ así como la desigualdad $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$, la cual resulta inmediatamente de la fórmula $OG^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ que expresa el cuadrado de la distancia entre el circuncentro y el baricentro del triángulo, obtenemos
$$m_a+m_b+m_c \leq \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\sqrt{\frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}} \leq \frac{9R}{2}$$
verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Por otra parte, multiplicando miembro a miembro las desigualdades

$$s(s-a)=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}\geq\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}=m_a^2\ ,$$

etc., resulta, habida cuenta de (1),

$$m_a m_b m_c \geq rs^2$$

y, toda vez que

$$s=(s-a)+(s-b)+(s-c)\geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{por}(1)}}{=}\ 3\sqrt[3]{r^2 s}$$

o, equivalentemente,

$$s^2 \geq 27r^2$$

obtenemos

$$m_a+m_b+m_c\geq 3\sqrt[3]{m_a m_b m_c}\geq 3\sqrt[3]{rs^2}\geq 3\sqrt[3]{27r^3}=9r$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

14. $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq\frac{2r}{R}$

Sustituyendo $\frac{2r}{R}$ por su igual $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, obtenemos

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\qquad(4)$$

equivalente a la propuesta.

Siendo $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}}$, etc. y positivos los números $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ y $\cos\frac{C}{2}$, la desigualdad (4) se escribe equivalentemente

$$\sin A\sin B\sin C\leq\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}\qquad(5)\ .$$

Tenemos

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B+C}{2}+\cos\frac{A-B-C}{2}\right),$$

$$\cos\frac{A-B+C}{2}=\cos\frac{\pi-2B}{2}=\sin B$$

y

$$\cos\frac{A-B-C}{2}=\cos\frac{-A+B+C}{2}=\cos\frac{\pi-2A}{2}=\sin A$$

de donde se sigue

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\sin A+\sin B}{2}$$

y cíclicamente.

Para establecer la validez de (5), hacemos servir la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica en la siguiente:

$$\begin{aligned}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}&=\\ &=\frac{\sin A+\sin B}{2}+\frac{\sin B+\sin C}{2}+\frac{\sin C+\sin A}{2}\\ &\geq\sqrt{\sin A\cdot\sin B}\cdot\sqrt{\sin B\cdot\sin C}\cdot\sqrt{\sin C\cdot\sin A}\\ &=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\end{aligned}$$

15. $9r\leq h_a+h_b+h_c\leq\frac{9R}{2}$

Tenemos

$$(h_a+h_b+h_c)\cdot\frac{1}{r}=(h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq 9\ ,$$

de donde

$$(h_a+h_b+h_c)\geq 9r\ .$$

Por otra parte, la siguiente desigualdad

$$a=(s-b)+(s-c)\geq 2\sqrt{(s-b)\cdot(s-c)}$$

es equivalente a

$$a^2\geq 4(s-b)\cdot(s-c)$$

y la escribimos en la forma

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{4}{a}\ .$$

Análogamente,

$$\frac{1}{s-c}+\frac{1}{s-a}\geq\frac{4}{b}\qquad\text{y}\qquad\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\geq\frac{4}{c}\ .$$

La suma de estas tres últimas desigualdades es

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

la cual, después de multiplicar por el valor S del área del triángulo se reduce a

$$r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c \;,$$

de la que resulta (ver la desigualdad número 11)

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

Bibliografía.

O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen, 1969.

DS Mitrinovic et al., Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluver Ac. Publishers, The Netherlands, 1989.

Mihály Bencze, ‘Problem 2717’, Crux Mathematicorum, 29, 2 (2003), 119-120.

I.V. Maftei y M. A. Nicolae, ‘Asupra unor relatii de evaluare într-un triunghi’, Gazeta Matematica, nr. 10/2002, 379-387.

Post Scriptum. Mi interés por las desigualdades geométricas empezó con la invitación del profesor Josep Grané i Manlleu de la Universitat Politècnica de Catalunya a que colaborara en la edición de 1999 del libro “Sessions de preparació per a l’olimpíada matemàtica” que edita la Societat Catalana de Matemàtiques.

La aceptación me llevó a intentar una tarea que, a la hora de la verdad, ha resultado bastante fructífera.

Mi reconocimiento y afecto al profesor Grané y a Francisco Bellot Rosado, de Valladolid, catedrático y editor de esta Revista Escolar de la OIM, como impulsores del olimpismo matemático en España, así como mi agradecimiento a ambos por haberme dado siempre, con creces, toda la ayuda que les he pedido.

Cala Figuera, Mallorca, junio 2003

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI