Día 1
VI OMCC
SOLUCIONES

Problema 1
En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.
Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.
`Nota:` Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.
Solución.
En primer lugar observemos que si queda una cantidad impar de n'umeros ninguno de los cuales sea m'ultiplo de otro, el jugador que tiene el turno pierde.
El primer jugador (A) gana borrando 4 y 8.
Si B borra todos los que quedan, pierde de inmediato. Si B borra 2 y 6, A borra 3 y 9 y gana.
Si B borra 3, 6 y 9, A borra cualquiera de los que quedan y gana.
Si B borra 6, A borra 9 y gana.
Si B borra 7, A borra 3, 6 y 9 y gana.
Si B borra 9, A borra 6 y gana.
Solución 2
El primer jugador (A) gana borrando 5 o 7. Sin perder generalidad supongamos que borra el 7.
Si B borra todos los que quedan, pierde de inmediato. Si B borra 2, 4, 6 y 8, A borra 9 y gana.
Si B borra 3, 6 y 9, A borra 4 y 8, y gana.
Si B borra 4 y 8, A borra 3, 6 y 9, y gana.
Si B borra 5, A borra 4 y 8, y gana siguiendo el proceso de la solución anterior.
Si B borra 6, A borra 8 y gana. (Ver nota)
Si B borra 8, A borra 6 y gana. (Ver nota)

Si B borra 9, A borra 2, 4, 6 y 8 y gana.

Nota: Ambas situaciones son análogas. Se mostrará como seguir cuando se han removido el 6, 7 8. En este caso, se tienen dos situaciones, que puede controlar A. Si B juega una pareja entonces A deshace la otra pareja, por ejemplo al borrar el 4 se deshace la pareja $\{2, 4\}$. Si B deshace una pareja, entonces A juega la otra pareja. A continuación se encuentran dos ejemplos:

$$\{2, 4\}, \{9\}, \{3\}, \{5\}, \{1\}$$

o

$$\{4\}, \{3, 9\}, \{2\}, \{5\}, \{1\}.$$

Problema 2

Se define una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$.

Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Solución

Calculemos los primeros términos de la sucesión:

$$\begin{array}{rcrrcr} a_0 & = & 1 & a_8 & = & 67 \\ a_1 & = & 1 & a_9 & = & 109 \\ a_2 & = & 3 & a_{10} & = & 177 \\ a_3 & = & 5 & a_{11} & = & 287 \\ a_4 & = & 9 & a_{12} & = & 465 \\ a_5 & = & 15 & a_{13} & = & 753 \\ a_6 & = & 25 & a_{14} & = & 1219 \\ a_7 & = & 41 & a_{15} & = & 1973 \end{array}$$

y, a partir de $r = 16$, $a_r > 2004$.

Por tanto, $0 < m \neq n < 16$. Se va a contar el número de enteros menores a 2004 que se pueden expresar como $a_m + a_n$.

Se tienen en total $\binom{15}{2}$ posibles sumas, de las cuales 8 son mayores que 2004.

Se demostrará que estas $\binom{15}{2}$ sumas son todas distintas entre si.

Supóngase que existen indices m, n y p, q con $m < n$ y $p < q$ tales que $a_m + a_n = a_p + a_q$ y $n \neq q$. Supóngase, sin perder generalidad, que $n > q$. Por tanto,

$$a_m + a_n > a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1 > a_{n-1} + a_{n-2} \geq a_q + a_{q-1} \geq a_q + a_p.$$

Por tanto, todas estas sumas son diferentes, y el número de enteros positivos menores que 2004 que se pueden expresar en la forma propuesta en el enunciado es igual a $105 - 8 = 97$.

Solución 2.

Se define la sucesión b_0, b_1, b_2, $\ldots$, , con $b_i = a_i + 1$, $i \geq 0$. Nótese que

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + 1 \Leftrightarrow \\ a_n + 1 &= a_{n-1} + 1 + a_{n-2} + 1 \Rightarrow \\ b_n &= b_{n-1} + b_{n-2}, \end{aligned}$$

de donde los b_i satisfacen la recursión de Fibonacci. Como los primeros dos términos de los b_i son iguales al doble de los primeros dos términos de Fibonacci, $b_i = 2F_i$, $i \geq 0$.

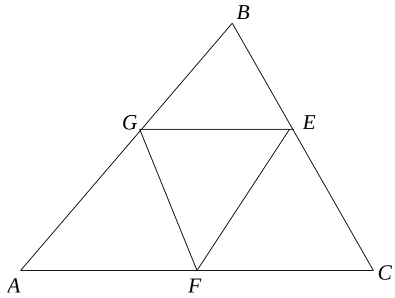
Finalmente, nótese que si existieran indices m, n, p, q tales que $a_m + a_n = a_p + a_q$ con $m < n$ y $p < q$ con $n \neq q$, entonces, sumando 2 a ambos lados de la igualdad, y dividiendo entre 2 los resultados, se obtendría que existen enteros positivos tales que $F_m + F_n = F_p + F_q$, lo cual implica que existen enteros con dos representaciones en base Fibonacci, lo que es imposible.

Haciendo un listado como en la solución anterior, se concluye que el número total de números que cumplen la propiedad es igual a 97.

Problema 3

Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Solución



Sea E' el corte de la paralela a CA por E con el lado AB. Sea E'' el corte de la paralela a CB por E' con el lado CA. Tenemos entonces:

$$CE'' = CA\frac{CE''}{CA} = CA\frac{BE'}{BA} = CA\frac{BE}{BC} = CA\left(1 - \frac{CE}{CB}\right) = CA\frac{CF}{CA} = CF$$

De donde se tiene que necesariamente:

$$F = E''$$

Por lo tanto $CEE'F$ es un paralelogramo (ya que $EE'||CF$ y $E'F||CE$).

Como las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio, entonces CE' pasa por M, de donde necesariamente:

$$G = E'$$

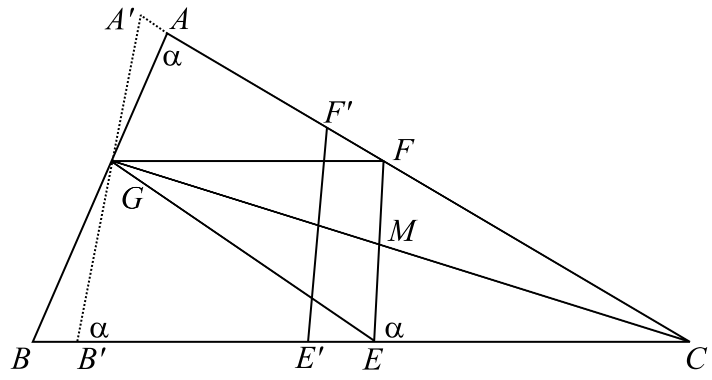
Entonces $CEGF$ es un paralelogramo, por lo tanto $\triangle FEG \sim \triangle EFC$.

Por otro lado, $\angle ECF = \angle ACB$ y $\angle CEF = \angle CAB$, de donde $\triangle EFC \sim \triangle ABC$. Tenemos entonces:

$$\triangle FEC \sim \triangle EFC \sim \triangle ABC$$

Solución 2

Se construye por G, la paralela a EF, que intersecta a AC en el punto A' y a BC en B'.



Como $\angle CEF = \angle CB'A'$, se tiene que $\triangle CEF$ es semejante a $\triangle CB'A'$. Ahora, como $\angle CEF = \angle BAC$, $\triangle CEF$ es semejante a $\triangle ABC$.

Por el teorema de Thales $B'G : GA' = EM : MF$, por tanto, G es punto medio de $A'B'$.

Nótese que si F es el punto medio de $A'C$ y E es el punto medio de $B'C$, entonces GFE es el triángulo medial de $A'B'C$, y el resultado pedido se sigue de forma inmediata.

Supóngase ahora que E y F no son los puntos medios de $B'C$ y $A'C$, respectivamente. Sean E', F' los puntos medios de $B'C$ y $A'C$, respectivamente. Por la construcción , $E'F' \parallel EF$ y como G es el punto medio de $A'B'$, entonces $GF' = E'C$ y son paralelos.

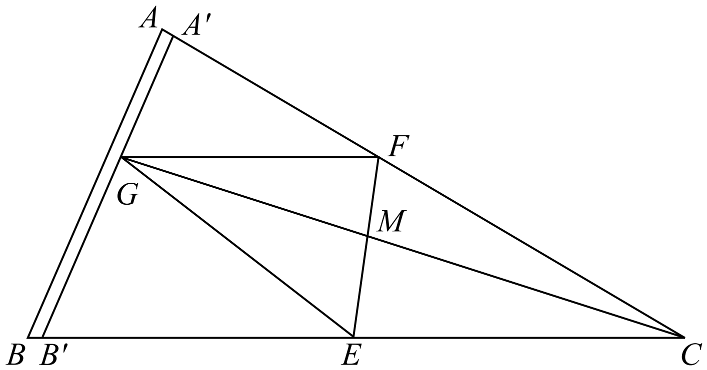
Como $\triangle AGF'$ es semejante a $\triangle ABC$ entonces $AF' : AC = GF' : BC = E'C : BC$, de donde $CF'/AC + E'C/BC = 1 = CF/AC + EC/BC$. Como EF es paralelo a $E'F'$, se concluye que $E' = E$, $F' = F$, y el resultado se sigue.

Solución 3.

Se demostrará que $\triangle FEG$ es semejante a ABC si y sólo si $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$.

Primero, supóngase que los triángulos son semejantes. Entonces, $\triangle FEG$ es semejante a $\triangle EFC$. Por tanto, $\angle GFE = \angle FEC = \angle BAC$, de donde $FG \parallel EC$. Del mismo modo, $\angle GEF = \angle EFC = \angle ABC$, de donde $GE \parallel AC$. Se sigue que $CFGE$ es un paralelogramo.

Por la semejanza $GF : BC = AF : AC$. Pero $GF = EC$, por tanto, $EC : BC = AF : AC$. Se sigue que $CE/CB + CF/CA = 1$.



Ahora, supóngase que $CD : EB + CF : FA = 1$. Considérese el punto G' en CG tal que $CFG'E$ es un paralelogramo. Si $G = G'$, el resultado se sigue inmediatamente. Supóngase que $G \neq G'$. Por G' se traza la paralela a AB, que intersecta al lado BC en B' y al lado AC en A'. Por la construcción se tiene que FEG' es semejante a $A'B'C$. Por la parte anterior, $CE : CB' + CF : CA' = 1$. Pero $CB' = kCB\prime$, $CA' = kCA$, de donde $CD : CB'CF : CA' = \left(\frac{1}{k}\right)(CE : EB + CF : FA) = 1$. Se sigue que $k = 1$, y $G = G'$. El resultado pedido es ahora inmediato.