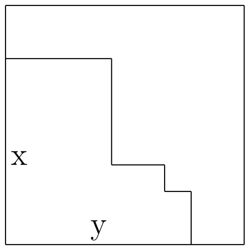
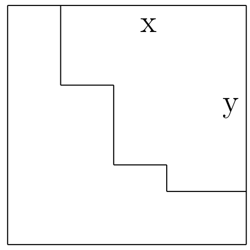
Día 2
VI OMCC
SOLUCIONES

Problema 4
Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.
Solución
El máximo es 180 y se obtiene cuando el tablero se colorea como un tablero de damas. En efecto, los segmentos que pueden ser frontera son los interiores (los que no pertenecen al borde del tablero) y todos ellos son frontera cuando se colorea el tablero como un damero.
El mínimo es 10, y se obtiene cuando todas las casillas a un lado de una mediana (una de las dos líneas que unen puntos medios de lados opuestos) se pintan de un color y las que est'an del otro lado se pintan del otro color. Para probar que efectivamente 10 es el mínimo observemos que el número de segmentos frontera verticales entre dos columnas adyacentes no puede superar a la diferencia (en valor absoluto) entre los números de casillas negras en cada columna. Por lo tanto, si se modifica cada columna poniendo todas las casillas blancas encima de las negras, el número de segmentos frontera no crece. Repitiendo este proceso para las filas, se obtiene una coloración con menor o igual número de segmentos frontera y en la cual si una casilla es negra también lo son todas las que se encuentran debajo o a la izquierda de ella. Si en esta coloración hay una fila completamente blanca y otra completamente negra (o una fila completamente blanca y otra completamente negra) es claro que debe haber al menos 10 segmentos frontera. De lo contrario se presentar'a una de las dos siguientes configuraciones:





En cada una de ellas el número de segmentos frontera es $x + y$, y en ambos casos se tiene

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{50} > 10.$$

Problema 5

Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB+CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

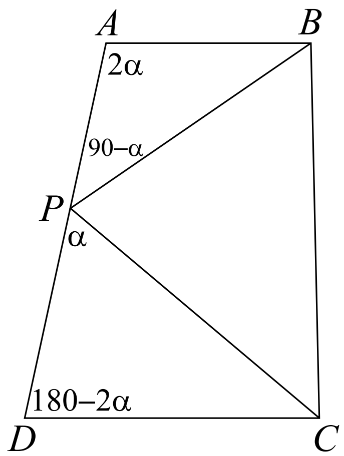
a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.

b) Sea Q el punto medio de BC y R el punto de corte de la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

Solución

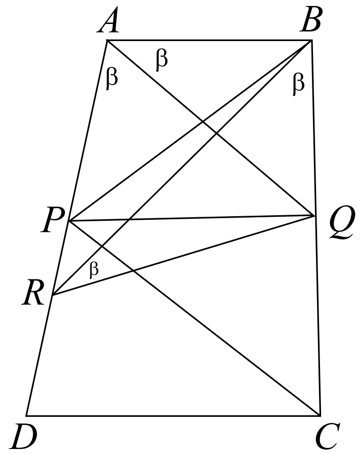
Parte a)

Sea $\angle PAB = 2\alpha$. Como $ABCD$ es un trapecio, entonces $\angle PDB = 180° - 2\alpha$. Como los triángulos ABP y CPD son isósceles, entonces $\angle PAB = 90° - \alpha$ y $\angle DPC = \alpha$. Se sigue que $\angle BPC = 180° - \angle APB - \angle DPC = 90°$.



Parte b)

Como A, B, Q, R están sobre la misma circunferencia, entonces $\angle RBQ = \angle RAQ = \beta$. Como BPC es un triángulo rectángulo, y Q es el punto medio de la hipotenusa, $QP = QB$. Como $AB = AP$, entonces AQ es mediatriz del segmento PB. Por tanto, $\angle PAQ = \angle QAB = \beta$.



Ahora, como $\angle QAB = \angle QRB$, entonces $\angle QRB = \angle QBR$, de donde $QB = QR$, y se sigue que R está en una circunferencia con centro Q y radio QB. Esta circunferencia es la misma circunferencia que pasa por los puntos B, P, C. El resultado pedido es ahora inmediato.

Problema 6

Con perlas de diversos colores se forman collares.

Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.

Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.

`Nota:` Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

Solución

Observemos que se pueden tener n perlas ordenadas y de q posibles colores de q^n formas. Por lo que podemos hacer una biyección entre cada una de estas ordenaciones y los q^n colores.
Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_{n^2})$ la configuración de un n^2 collar de perlas con q colores posibles. A partir de este collar particular se pueden formar una cantidad n de n collares con q^n colores posibles de la siguiente forma: Se toma un k y se forman n vectores de la siguiente forma $(a_i, a_{i+n}, \ldots, a_{i+n^2-n})$ donde i varía entre k y $n+k$ módulo n. Como por cada n^2 collar había q colores posibles para las perlas es claro que de los vectores que hemos formado se pueden hacer q^n combinaciones diferentes y a cada una asignarle un color. Así cada uno de estos vectores toma un color único y entonces se puede formar un n collar con q^n colores posibles tomando el color que genera el vector que originan los a_i's con i de resto 1, seguido por el color que genera el vector que originan los a_i's con i de resto 2, y así sucesivamente hasta el color que genera el vector que originan los a_i's con i de resto n. Variando el k por los n posibles restos se tienen los n collares.
Es claro además que el n collar que genera el n^2 collar de perlas es primo, si y solo si, este último es primo. Si se tiene un n^2 collar que no es primo es claro que el n collar que genera no puede ser primo.
Supongamos que cierto n^2 collar de perlas es primo y genera un collar $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ que no es primo. Entonces se tiene que a partir de cierto t se cumple que b_{t+i} es igual a b_i (evaluando dichos subíndices módulo n). Pero esto implica que los vectores que los originan también son iguales y que en el n^2 collar que lo genera también ha de existir cierto s tal que a_{s+i} es igual a a_i (evaluando dichos subíndices módulo n_2). Pero esto contradice que el collar que lo genera sea primo.
Como ya tenemos que a cada los q^n colores le hemos asignado una biyección con los vectores antes mencionados tenemos que de cada n collar se puede traducir sus colores en vectores y llegar al n^2 collar de perlas que lo genera por la transformación antes explicada. Así que sí dos n^2 collares generan un mismo n collar, entonces ellos deben ser iguales. Por lo que la transformación antes explicada es inyectiva, y como además de cada n collar se puede llegar al n^2 collar que lo genera se tiene que también esta transformación es sobreyectiva y biyectiva.

De esto último sale que el número de n collares primos que pueden hacerse con perlas de q^n colores posibles es igual a n veces el número de n^2 collares primos que pueden formarse con q colores.