VII OLIMPIADA MATEMATEMATICA DE CENTRO AMERICA Y EL CARIBE SAN SALVADOR, El SALVADOR

21 de junio de 2005

PROBLEMA 1

¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

PROBLEMA 2

Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

PROBLEMA 3

En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

a) Demuestre que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas.
Cada problema vale 7 puntos.

VII OLIMPIADA
MATEMATEMATICA
DE CENTRO AMERICA Y EL
CARIBE
SAN SALVADOR, El
SALVADOR

22 de
junio de 2005

PROBLEMA 4

Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

PROBLEMA 5

En un triángulo acutángulo ABC, sean H su ortocentro y M el punto medio de lado AC. Por M se traza una recta L paralela a la bisectriz del ángulo AHC. Demuestre que la recta L divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

PROBLEMA 6

Se tienen n cartas numeradas de 1 a n y p cajas para guardarlas, con p primo. Determine los posibles valores de n para los que se pueden guardar todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas.
Cada problema vale 7 puntos.