SEGUNDA SESSÃO DE PROBLEMAS

22 de setembro de 2004

Problema 4

Determinar todos os pares (a,b), onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a + b$ e $201a + b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

Problema 5

Dado um triângulo escaleno ABC, se designam por A', B' e C' os pontos de intersecção das bissectrizes interiores dos ângulos A, B e C com os lados opostos, respectivamente.

Sejam: A'' a intersecção de BC com a mediatriz de AA',

B'' a intersecção de AC com a mediatriz de BB' e

C'' a intersecção de AB com a mediatriz de CC'.

Provar que A'', B'' e C'' são colineares.

Problema 6

Para um conjunto $\mathcal{H}$ de pontos no plano, diz-se que um ponto P do plano é um *ponto de corte* de $\mathcal{H}$, se existem quatro pontos distintos A, B, C e D em $\mathcal{H}$ tais que as rectas AB e CD são distintas e se cortam em P.

Dado um conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de pontos no plano, se constroi uma sucessão de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$, … da seguinte forma: para qualquer $j ? 0$, $\mathcal{A}_{j+1}$ é a união de $\mathcal{A}_j$ com o conjunto de todos os pontos de corte de $\mathcal{A}_j$.

Demonstrar que se a união de todos os conjuntos da sucessão é um conjunto finito, então para qualquer $j ? 1$ tem-se $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duração: 4h 30m.
Cada problema vale sete pontos

Versão em português