XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Segundo Día
17 de septiembre de 2003

4. Sea $M = \{1,2,\ldots,49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

5. En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP=CQ$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y AQ respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX, XY y DY.

6. Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos **Versión en español**